

Vorlesungsscript

Numerische Methoden in der Strömungsakustik CAA

Christoph Richter, Łukasz Panek, Norbert Schönwald, Mei Zhunag

8. April 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Was ist CAA	4
2.1	Klassifizierung	6
2.1.1	Semianalytische Methoden	6
2.1.2	Integralverfahren	6
2.1.3	Verfahren im Frequenzbereich	6
2.1.4	Verfahren im Zeitbereich	7
3	Finite Differenzen	7
3.1	Übersicht	7
4	DRP	8
4.1	Das Dispersion Relation Preserving (DRP)–Schema von Tam	8
5	Filter	14
5.1	Künstliche, selektive Dämpfung	14
5.2	Filterung	16
6	Vergleich der Koeffizientensätze bei Differenzen- und Filterschemata	17
7	Schallharte Wände	19
7.1	Indirekte Bestimmung	20
7.2	Direkte Bestimmung	21

8	Verschiedene Gleichungstypen in der CAA	23
8.1	Die Grundgleichungen	23
8.1.1	Massenbilanz	23
8.1.2	Die Navier-Stokes-Gleichungen	24
8.1.3	Energiebilanz	25
8.2	Dimensionslose Größen	26
8.3	Linearisierung für kleine Störungen	28
8.3.1	Kontinuitätsgleichung	28
8.3.2	Impulsgleichungen	29
8.3.3	Energiegleichung als Druckschwankung	29
8.3.4	Energiegleichung als Entropieschwankung	30
8.3.5	Zusammenfassung	31
9	Lösungen der linearisierten Euler-Gleichungen	33
10	Schallquellen	33
11	Axialsymmetrische Probleme	33
11.1	Zylinderkoordinaten	33
11.2	Axialsymmetrie	34
11.3	Randbedingung an der Achse	37
11.4	Anhang: Gleichungen zum Abschnitt	39
11.4.1	Vektorielle Schreibweise der vollständigen Modellgleichungen	39
11.4.2	Vektorielle Schreibweise der rotationsfreien Modellgleichungen	40
11.4.3	Vereinfachung für drallfreie isentrope Strömung	41
12	Komplexe Wandimpedanzen	42
12.1	Modelle für die Wandimpedanz Frequenzbereich	42
13	Nicht reflektierende Abstrahl- und Ausflussbedingung	42
13.1	Die Newton-Cooling/Friction (NC/F)-Randbedingung	42
13.2	Die Perfectly-Matched-Layer (PML)-Randbedingung	43
13.3	Die charakteristische Randbedingung von Giles	46
14	Nichtlineare CAA	49
14.1	Kontinuitätsgleichung	49
14.2	Euler-Gleichung	50
14.3	Druckgleichung	51
14.4	Matrixform der nichtlinearen Gleichungen	51
14.5	Anwendungen der nichtlinearen Theorie	52
15	Berücksichtigung der Grenzschicht in der mittleren Strömung	55
	Literaturverzeichnis	55
	Index	57

1 Einleitung

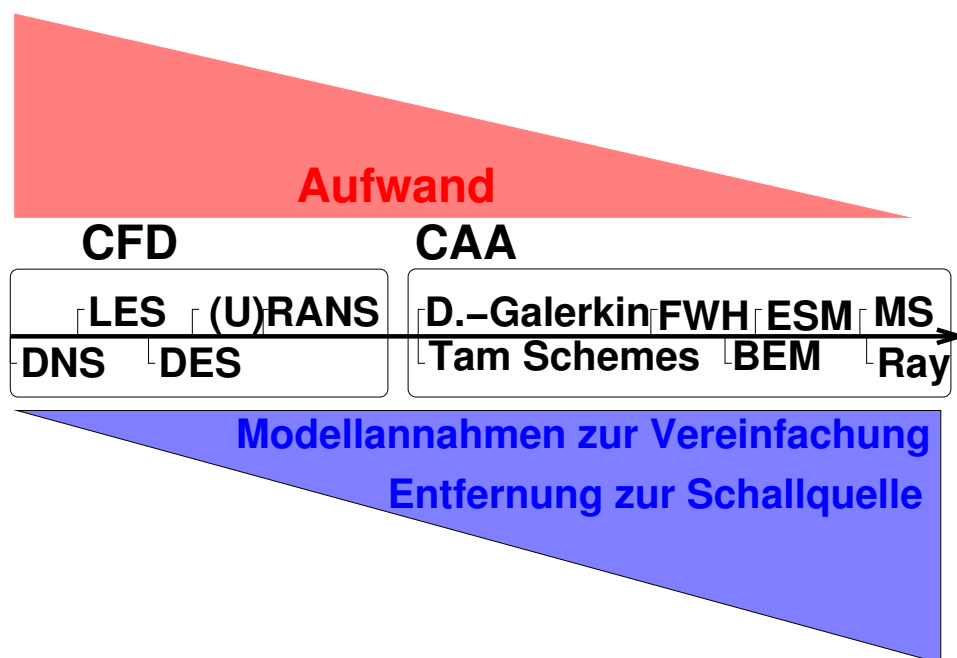
Das vorliegende Script in deutscher Sprache ist aus verschiedenen Diplomarbeiten entstanden, die bereits im HFI zum Thema CAA durchgeführt wurden. Es fließen außerdem eine Reihe von Dokumenten zu aktuellen Forschungsthemen und nicht zuletzt die Erfahrung von Mei Zhung (Michigan State University) ein, die die Vorlesung in englischer Sprache hier etabliert hat. In wesentlichen Punkten ist die Vorlesung damit an den CAA-Kurs von Chris Tam, dem „Erfinder“ des DRP-Schemas angelehnt. Das vorliegende Skript erhebt (noch) keinen Anspruch auf Vollständigkeit und einzelne Kapitel fehlen bisher noch, werden aber im Laufe des Sommersemesters ergänzt. Die eine oder andere spezielle Formulierung aus einer Diplomarbeit, sowie einige der Fehler im Text werden dann auch verschwunden sein, so dass am Ende des Sommersemesters ein Nachschlagewerk in Deutscher Sprache zur Verfügung steht, welches für eine Prüfungsvorbereitung und zum Nachlesen der Hintergründe verwendet werden kann.

Christoph Richter

2 Was ist CAA

Der Begriff Computational Aeroacoustics (CAA) wird für eine Reihe von Verfahren gebraucht, die Probleme aus der Strömungsakustik numerisch simulieren. Die Lebensbereiche in denen Schall eine Rolle spielt erstrecken sich von Musik in Konzertsälen, über den satten (EU), bzw. röhrenden (US) Sound eines Autos, über Straßenlärm bis hin zum Freistrahllärm von Flugzeugen. Ähnlich vielschichtig wie die Anwendungen von CAA sind die verfügbaren Verfahren zur Modellierung und Analyse der Schallausbreitung und Schallabstrahlung im Ingenieurbereich. Dabei ist einerseits das physikalische Verständnis der Vorgänge bei der Schallausbreitung und andererseits eine Vorhersage der Schallentstehung und –abstrahlung zum Beobachter von Interesse.

Unter CAA versteht man daher eine Reihe von unterschiedlichen Verfahren, die im Folgenden stichpunktartig vorgestellt werden. Dabei wird auf eine starke Gliederung und Einordnung der Methoden geachtet. Ein detailliertes auf die Teilaspekte der einzelnen Methoden könnte allerdings für jede Methode ganze Scripte füllen, daher wird darauf verzichtet und nur besonders charakteristische Eigenarten der Methoden hervorgehoben.



Grundlegend bei allen vorgestellten CAA-Methoden¹ ist die Ausnutzung der eindeutigen Trennung von akustischen und hydrodynamischen Längenskalen. Schall bewegt sich mit Schallgeschwindigkeit und hydrodynamische Störungen breiten sich konvektiv – mit Strömungsgeschwindigkeit – aus. Diese Erkenntnis führt zu so grundlegend verschiedenen Herangehensweisen bei der Simulation, dass eine Reihe von Verfahren speziell für die Schallausbreitung oder die Strömungssimulation entwickelt wurden. Zusätzlich dazu zeigt Schall einen großen Dynamikbereich bei relativ kleinen Amplituden. Daher haben sich linearisierte Störungsansätze, welche die ohnehin kaum wirksame Reibung vernachlässigen² etabliert.

¹Es gibt inzwischen CFD-Simulationen, die ursprünglich für CAA entwickelte Methoden verwenden. Diese werden in der Vorlesung auch betrachtet, werden aber allgemein nicht als CAA-Methoden, sondern als LES oder DNS, also echte CFD-Methoden klassifiziert.

²Schallenergie wird nur in sehr geringem Umfang an Wänden dissipiert, daher wird dieser Effekt vernachlässigt. Dieses Vorgehen ist allgemein akzeptiert und wird auch in der Auswertung Experimenten häufig angewendet, wobei nur

CAA-Verfahren lösen im Allgemeinen vereinfachte Grundgleichungen zur Beschreibung der Schallausbreitung. Diese beinhalten in jedem Fall eine homogene Wellengleichung, welche die Schallausbreitung beschreibt, sowie häufig Quellterme für die Schallquelle, die nur im Quellgebiet ausgewertet werden. Durch geschickte Vernachlässigung (z. B. FEM), bzw. Ansatz analytischer Lösungen (z. B. FW&H) ergibt sich ein wesentlich geringerer Rechenaufwand. Die speziellen Eigenschaften der Schallausbreitung, welche bei der numerischen Gittergenerierung und der Auswahl der Verfahren eine Rolle spielen, lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Großer spektraler Inhalt (large spectral content) 100 Hz–40 kHz
2. Großer Dynamikbereich (large range of amplitudes) $0 \text{ dB} \approx \times 10^{-5} \text{ Pa}$ bis $130 \text{ dB} \approx 90 \text{ Pa}$
3. Frequenzunabhängig Ausbreitung mit Schallgeschwindigkeit (propagation at the speed of sound for any frequency)
4. nahezu Dissipationsfreie Ausbreitung im Freifeld unter 40 kHz (low atmospheric attenuation below 40 kHz)
5. Großes Ausbreitungsgebiet von Interesse (large propagation distance)
6. Kleine Amplituden im Vergleich zur mittleren Strömung (small perturbations compared to the mean state) $100 \text{ hPa} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$

Es gibt also deutliche Unterschiede zwischen der Strömung und der Akustik sowohl in den Zeit- und Längen-Skalen als auch in den Amplituden. Diese Unterschiede lassen sich in Anforderungen und Lösungsansätze für CAA-Methoden formulieren:

1. Auflösung großer Wellenlängenbereiche mit geringem numerischen Aufwand
2. Hohe Genauigkeit und geringe Verluste (Dissipation)
3. Keine Dispersion
4. Dissipationsfreiheit
5. Dispersions- und Dissipationsfreiheit und geringer numerischer Aufwand
6. Aufspaltung in mittlere Strömung (mean flow) und Schwankungsanteil (perturbation)

Die im folgenden vorgestellten Methoden erfüllen weitgehend die oben genannten Forderungen, wobei zum Teil auch noch Forderungen an die mittlere Strömung gestellt werden oder diese ganz vernachlässigt wird. Im Vergleich zu CFD-Methoden sind ganz andere Skalen aufzulösen, und spezielle Randbedingungen zu formulieren. Insbesondere der hyperbolische Charakter der Wellengleichung führt zu einer Reihe von zusätzlichen numerischen Problemen bei der Simulation der Schallausbreitung.

selten Abweichungen beobachtet werden. Die Grenzschichten welche sich über eine halbe Wellenlänge bei der Ausbreitung einer Schallwelle (z. B. bei 1000 Hz etwa 15 cm) bei Geschwindigkeiten von deutlich unter 1m/s ausbilden sind sehr dünn und könnten gar nicht sinnvoll von einem aeroakustischen Verfahren aufgelöst werden.

2.1 Klassifizierung von CAA-Methoden

2.1.1 Semianalytische Methoden

Beispiele:

- modale Ansätze
- Multiple Skalen (multiple scales) [21] (basierend auf der Annahme der energetischen Trennung der einzelnen radial-Moden)
- Strahlen (Raytracing) – Methoden
- Methode der Ersatzstrahler (ESM), (Zerlegung in Mono-, Di- und Quadrupolquellen)

2.1.2 Integralverfahren

Beispiele:

- Kirchhoff Integration
- Ffowcs-Williams and Hawkings aeroakustische Analogie
- Lighthills akustische Analogie
- Boundary Element Methode (BEM)

2.1.3 Verfahren im Frequenzbereich

Nennenswerte Methoden:

- Nicht optimierte Finite Elemente Methoden (finite element methods) – W. Eversman
- Spektralelement (spectral element methods) –
- Discontinious Galerkin (discontinious Galerkin methods) [2]

Besonderheiten:

- Lösung im Frequenzbereich für jede einzelne Frequenz
- Implizite Lösung, aber iterative Verfahren sind instabil und daher nicht einsetzbar
- Führt zu großen Problemen in 3D (Direkte Lösung, viele Freiheitsgrade, starke Kopplung)
- Komplexe Amplituden im gesamten Rechengebiet (keine zeitliche Entwicklung oder Anfahrvorgänge)
- Charakteristische Randbedingungen einfach einsetzbar

2.1.4 Verfahren im Zeitbereich

- Sogenannte die Dispersionsrelation erhaltende (Dispersion Relation Preserving) DRP-Verfahren in der Aeroakustik
- Finite Difference Time Domain (FDTD) – Methoden in der Elektrodynamik z. B. [30]
- Kompakte Schemata ohne Richtungsabhängigkeit für krummlinige Gitter z. B. [15, 23]
- Sogenannte “Tam schemes” auf Basis eindimensionaler Differenzensterne und orthogonaler Gitter z. B. [26, 4]

Besonderheiten:

- Üblicherweise Verfahren höherer Ordnung
- Block strukturierte Zerlegung des Rechengebiets (Domain decomposition Technique) einfach möglich
- Probleme in 3D effizienter lösbar als im Frequenzbereich [8]
- 2D Probleme sind im Frequenzbereich effizienter lösbar [8]

3 Finite Differenzen Methoden – Vor- und Nachteile

Eine räumliche Diskretisierung basierend auf finiten Differenzen ist relativ einfach zu verwirklichen. Man verzichtet dabei auf die Vorteile einer nachweisbaren Konservativität. Ansätze auf Basis der integralen Grundgleichungen wie finite Elemente oder Finite Volumen Verfahren bieten Konservativität auf Kosten einer impliziten Formulierung zur Lösung. Die Methode der Zeit-Integration ist nicht durch die verwendete räumliche Diskretisierung festgelegt, auch wenn häufig die Kombination aus Lösung im Frequenzbereich und Finiten Elementen bzw. Lösung im Zeitbereich und finiten Differenzen auftritt. Finite Differenzen werden z. B. auch zur Bestimmung von Flüssen mit höherer Genauigkeitsordnung für eine implizite Lösung im Frequenzbereich benutzt, während im Dreidimensionalen häufig Quasi Zeitschritt (quasi time stepping) Methoden bei Finiten Elementen zum Einsatz kommen.

Die Ableitungen in den Raumrichtungen wird mit Hilfe eines Differenzensterns bestimmt, der den Funktionswert (z. B. des Drucks) an endlich vielen Stützstellen um den Punkt der gesuchten Ableitung mit einem entsprechenden Koeffizienten multipliziert. Es sind im Allgemeinen eindimensionalen Fall die Punkte $(n - N$ bis $n + M)$ zur Bestimmung der Ableitung an der Stelle n notwendig.

3.1 Eine Übersicht der Finite-Differenzen (FD)-Verfahren

Es gibt eine Reihe von Ansätzen, die zu verschiedenen Koeffizienten für die Bestimmung der Ableitung führen. Für Standardschemata auf Basis einer Taylor-Reihenentwicklung gilt, dass die Anzahl der Koeffizienten eines zentralen Differenzensterns eins größer als die erreichte Fehlerordnung ist. Für ein Schemata 6. Ordnung sind daher 7 Punkte in 1D notwendig. Für zentrale Differenzensterne gilt allgemein, dass für eine Dissipationsfreiheit eine Symmetrie der Koeffizienten notwendig ist.

Bei der Erzeugung optimierter Schemata werden statt einer strikten Erhöhung der Fehlerordnung andere Kriterien hinzugenommen, wobei die erreichbare Ordnung sinkt. Im Folgenden wird das

relativ einfache Beispiele des für harmonische Wellenausbreitung optimierten, zentralen Differenzensterns von Tam and Webb [26] erläutert. Als Kriterium für die Optimierung wird dabei ein möglichst geringer integraler Fehler über einen bestimmten Wellenlängenbereich gefordert. Da die besonderen Vorteile der zentrale Differenzen erhalten werden sollen, ist mit 7 Punkten aufgrund der Symmetrie nur noch eine Genauigkeit von 4. Ordnung erreichbar.

Beim Übergang auf mehrdimensionale Rechengebiete gibt es zwei Ansätze:

1. Voraussetzung orthogonaler äquidistanter Netze und Nutzung der 1D-Differenzensterne
2. Nutzung aller Punkte in der Umgebung des gesuchten Punktes zur Erhaltung der Ordnung auch in den gemischten Ableitungen bei nicht orthogonalen Netzen.

Die unter 1. zu nennenden Verfahren (z. B. Tam and Webb [26], Bogey and Bailly [4]) bieten Vorteile bei der Generierung von dreidimensionalen Gittern. Die sogenannten kompakten Schemata unter 2. (z. B. Lele [15]) bieten erhebliche Vorteile, in Hinblick auf die Flexibilität und bei komplexen Geometrien, führen jedoch zu mehr Operationen. Der Hauptnachteil ist das Fehlen von Gittern für dreidimensionale kompakte Schemata in zylindrischen Geometrien.

4 Optimierung für die Beschreibung der Wellenausbreitung: DRP (dispersion relation preserving)–Schemata

4.1 Das Dispersion Relation Preserving (DRP)–Schema von Tam

Für die räumliche Diskretisierung, ist von Tam and Webb [26] das Dispersion-Relation-Preserving Scheme, vorgestellt worden.

Die Grundidee dieses Verfahrens ist es, den Fehler zwischen den aus der Differentialgleichung des Problems folgenden Wellenzahlen k und den aus der Diskretisierung folgenden numerischen Wellenzahlen \bar{k} zu minimieren.

Mit einem finiten Differenzen Schema läßt sich die erste Ableitung einer Funktion f an einem Knoten l allgemein für "äquidistante Gitter in folgender Form approximieren:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_l = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_l} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M a_j f_{l+j} \quad (1)$$

Dabei werden die Funktionswerte an N Knoten links und M Knoten rechts des Knoten verwendet an dem die Ableitung bestimmt werden soll.

Wird die Funktion f als kontinuierlich vorausgesetzt, stellt 1 einen Spezialfall folgender Gleichung dar:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M a_j f(x + j\Delta x) \quad (2)$$

Die Koeffizienten a_j der Standardschemen werden aus Taylor-Reihenentwicklungen um die Stelle x mit Vielfachen der Schrittweite Δx bestimmt, die nach dem P ten Glied abgebrochen werden, so daß für die die erste Ableitung ein Fehler höchstens der Ordnung $(\Delta x)^P$ entsteht.

$$f_{l+j} = f(x_l + j\Delta x) = \sum_{k=0}^P \frac{(j\Delta x)^k}{k!} \left. \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right|_{x_l} + O[(\Delta x)^{P+1}] \quad \text{für } (j = -N, \dots, M) \quad (3)$$

Durch Multiplikation der Gleichungen 3 mit dem jeweiligen a_j und anschließenden Summieren der Gleichungen erhält man das Schema 1, wenn die a_j folgenden Bedingen genügen:

$$\sum_{j=-N}^M a_j j^k = \delta_{1k} = \begin{cases} 1 & , \quad k = 1 \\ 0 & , \quad k \neq 1 \end{cases} \quad \text{für } (k = 0, \dots, P) \quad (4)$$

st $P = M + N$ stellt 4 ein eindeutig bestimmten lineares Gleichungssystem mit $P + 1$ Gleichungen dar, dessen Lösung die gesuchten Koeffizienten a_j sind.

Um untersuchen zu können, wie sich eine Diskretisierung der Form 1 auf die Dispersions-Beziehung auswirkt, wird mit Hilfe der Fouriertransformation

$$\tilde{f}(k_x) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-imk_x x} dx \quad (5)$$

vom geometrischen Raum in den Wellenlängenraum übergegangen.

Angewendet auf beide Seiten von 2 ergibt die Fouriertransformation (5):

$$imk_x \tilde{f}(k_x) \approx im \left(\frac{-im}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M a_j e^{imk_x \Delta x} \right) \tilde{f}(k_x) \quad (6)$$

Der Vergleich beider Seiten von 6 zeigt, daß in der diskreten Form statt der tatsächlichen Wellenzahl k_x eine numerische Wellenzahl \bar{k}_x in der Form

$$\bar{k}_x = \frac{-im}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M a_j e^{imj k_x \Delta x} \quad (7)$$

verwendet wird.

Die mit Δx dimensionslos gemachte numerische Wellenzahl $\bar{k}_x \Delta x$ ist eine periodische Funktion von der dimensionslosen Wellenzahl $k_x \Delta x$ mit der Periode 2π . Um eine sinusförmige Welle der Wellenlänge λ diskret zu approximieren sind mehr als 4 Punkte pro Wellenlänge (PPW) erforderlich. Damit \bar{k}_x aus 7 eine gute Approximation von k_x ist, folgt daraus, daß für $|k_x \Delta x| < \pi/2$ die Summe der Abweichungen zwischen \bar{k}_x und k_x möglichst klein ist, also

$$E = \int_{-\eta}^{\eta} |k_x \Delta x - \bar{k}_x \Delta x|^2 d(k_x \Delta x) \quad (8)$$

$$= \int_{-\eta}^{\eta} \left| im\kappa - \sum_{j=-N}^M a_j e^{imj\kappa} \right|^2 d\kappa \quad \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \quad (9)$$

mit $\eta = \pi/2$.

Die Bedingungen damit E minimal wird sind:

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = 0 \quad \text{für } (k = -N, \dots, M) \quad (10)$$

Dies führt auf folgendes lineares Gleichungssystem für die a_j :

$$\eta a_k + \left(\sum_{\substack{j=-N \\ j \neq k}}^M a_j \frac{\sin([j-k]\eta)}{j-k} \right) - \frac{\sin(k\eta)}{k^2} + \frac{\eta \sin(k\eta)}{k} = 0 \quad \text{für } (k = -N, \dots, M) \quad (11)$$

Die so gewonnenen Koeffizienten a_j minimieren nun zwar den Fehler in den Wellenzahlen, berücksichtigen aber nicht mehr die Fehlerordnung im geometrischen Raum.

Durch Kombination des Minimierungsproblems aus 9 mit den Bedingungen aus 4 als Nebenbedingungen

$$\varphi_n = \sum_{j=-N}^M a_j j^n - \delta_{1n} = 0 \quad \text{für } (n = 0, \dots, P) \quad (12)$$

kann für $P \leq M + N$ das Minimierungsproblem mit Nebenbedingungen

$$L = E + \sum_{n=0}^P \beta_n \varphi_n \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \quad (13)$$

formuliert werden. Damit L minimal wird sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a_k} &= \eta a_k + \left(\sum_{\substack{j=-N \\ j \neq k}}^M a_j \frac{\sin([j-k]\eta)}{j-k} \right) - \frac{\sin(k\eta)}{k^2} + \frac{\eta \sin(k\eta)}{k} + \sum_{n=0}^P \beta_n k^n = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta_m} &= \sum_{j=-N}^M a_j j^m - \delta_{1m} = 0 \quad (14) \\ &\text{für } (k = -N, \dots, M) \quad \text{und } (m = 0, \dots, P) \end{aligned}$$

Ein Schema der Form 1 mit den so gewonnenen Koeffizienten a_j ist von der Fehlerordnung Δx^P und minimiert den Dispersionsfehler.

Aus 11 bzw. 14 ist ersichtlich, daß für $M = N$, also ein zentrales Differenzen Schema, $a_j = -a_{-j}$ ist. Dadurch ist die numerische Wellenzahl \bar{k}_x aus 7, wie die analytische Wellenzahl k_x , rein reell. Bei nicht symmetrischen Schemata, für die $M \neq N$ ist, wird \bar{k}_x komplex. Der nicht physikalische imaginäre Anteil in \bar{k}_x führt zu einem Anwachsen der Lösung und schließlich zur Instabilität. Deshalb sollten solche unsymmetrischen Schemata nur in stark begrenzten Gebieten verwendet werden, in denen sich zentrale Schemata nicht anwenden lassen, wie etwa in den Randgebieten.

1 zeigt das Verhalten $\bar{k}_x(k_x)$ für verschiedene Diskretisierungs-Schemata. Es ist zu erkennen, daß bis zu einem durch das Schema bestimmten Grenzwert \bar{k}_{grenz} die Wellenzahl k durch die numerische Wellenzahl \bar{k} gut approximiert wird. Für Wellenzahlen die größer als diese Grenzwellenzahl \bar{k}_{grenz} sind, also für Wellen kurzer Wellenlänge, geben die Schemata die Wellenzahl nicht richtig wieder. Mit anderen Worten, für kurze Wellenlängen tritt numerische Dispersion auf. Die Grenzwellenzahl gibt die minimal erforderliche Auflösung an, die erforderlich ist, um eine im Problem enthaltene Wellenzahl dispersionslos wiederzugeben. Die Auflösung wird in Punkten pro Wellenzahl (PPW) angegeben, und ist als

$$\text{PPW} = \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{2\pi}{k\Delta x} \quad (15)$$

definiert.

In 1 sind die Grenzwellenlängen und die daraus resultierenden benötigten Auflösungen für verschiedene Diskretisierungsschemata dargestellt. Es ist erkennbar, daß mit zunehmender Anzahl der im Schema verwendeten Punkte die zur korrekten Wiedergabe einer bestimmten Wellenlänge benötigte Auflösung abnimmt. Bei höherer Punktzahl im Schema können also größere Gitterschrittweiten Δx verwendet werden, was die Anzahl der Knotenpunkte und somit den Speicherbedarf und Rechenaufwand verringert. Dies wird aber mit einem erhöhten Rechenaufwand an den einzelnen Knoten erkauft. Hier kommen nun die Vorteile der DRP-Schemata zum tragen. Wie man aus der Tabelle erkennt, ist die benötigte Auflösung für das 7-Punkt DRP-Schema um 10% geringer als für das 7-Punkt Standard-Schema bei gleichem Rechenaufwand.

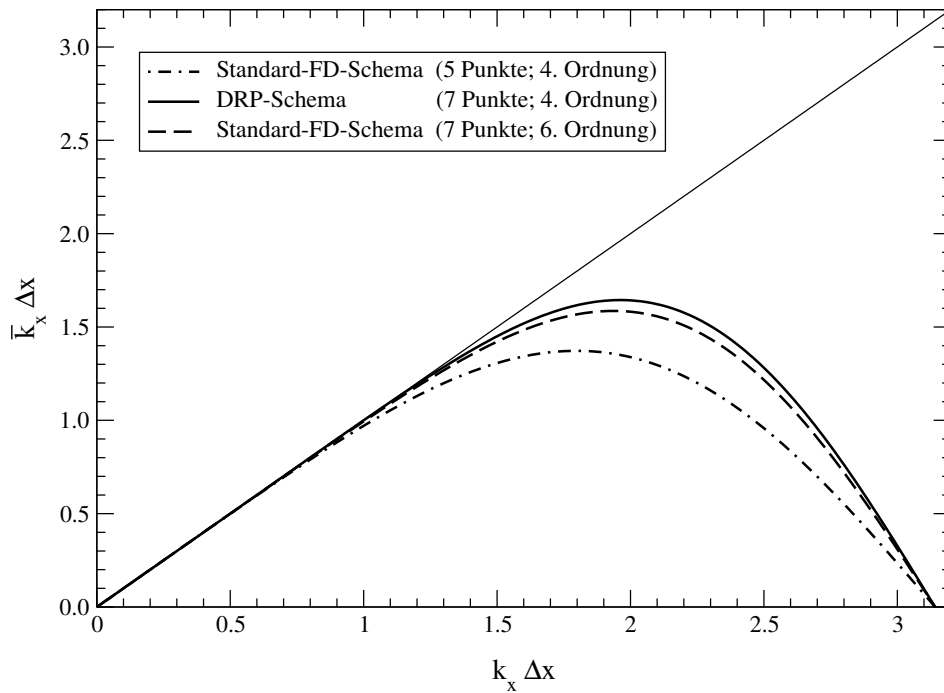


Abbildung 1: Vergleich zwischen $\bar{k}\Delta x$ und $k\Delta x$ für verschiedene Verfahren

Schema	Grenzwellenlänge $k_{\text{grenz}}\Delta x$	Auflösung (PPW)
5 Punkte, 4. Ordnung (Std.)	0.70	9.0
7 Punkte, 6. Ordnung (Std.)	1.00	6.0
7 Punkte, 4. Ordnung (DRP)	1.16	5.4
9 Punkte, 4. Ordnung (DRP)

Tabelle 1: Grenzwellenlängen und Auflösungen für verschiedene Diskretisierungsschemata

Die Tabellen 2, 3 und 4 enthalten die entsprechend 14 bestimmten Koeffizienten für das zentrale und die rück- bzw. vorwärtigen 7-Punkt DRP-Schema 4. Ordnung. Bei der Berechnung der Koeffizienten für das zentrale Schema, wurde einem Vorschlag von Tam and Shen [25] entsprechend $\eta = 1.1$ statt $\pi/2$ verwendet.

Koeffizienten	$N = 3, M = 3$
a_{-3}	-0.020843142770
a_{-2}	-0.166705904415
a_{-1}	-0.770882380518
a_0	0.000000000000
a_1	0.770882380518
a_2	0.166705904415
a_3	0.020843142770

Tabelle 2: Koeffizienten für das zentrale 7-Punkt DRP-Schema 4. Ordnung ($\eta = 1.1$)

Koeffizienten	$N = 6, M = 0$	$N = 5, M = 1$	$N = 4, M = 2$
a_{-6}	0.203876371	—	—
a_{-5}	-1.128328861	-0.048230454	—
a_{-4}	2.833498741	0.281814650	0.026369431
a_{-3}	-4.461557104	-0.768949766	-0.166138533
a_{-2}	5.108851952	1.388928322	0.518484526
a_{-1}	-4.748611401	-2.147776050	-1.273274737
a_0	2.192280339	1.084875676	0.474760914
a_1	—	0.209337622	0.468840357
a_2	—	—	-0.049041958

Tabelle 3: Koeffizienten für die rückwärtigen 7-Punkt DRP-Schemata 4. Ordnung ($\eta = \pi/2$)

Koeffizienten	$N = 2, M = 4$	$N = 1, M = 5$	$N = 0, M = 6$
a_{-2}	0.049041958	—	—
a_{-1}	-0.468840357	-0.209337622	—
a_0	-0.474760914	-1.084875676	-2.192280339
a_1	1.273274737	2.147776050	4.748611401
a_2	-0.518484526	-1.388928322	-5.108851952
a_3	0.166138533	0.768949766	4.461557104
a_4	-0.026369431	-0.281814650	-2.833498741
a_5	—	0.048230454	1.128328861
a_6	—	—	-0.203876371

Tabelle 4: Koeffizienten für die vorwärtigen 7-Punkt DRP-Schemata 4. Ordnung ($\eta = \pi/2$)

5 Kurzwellige Anteile und deren Filterung bzw. Dämpfung

5.1 Künstliche, selektive Dämpfung (selective artificial damping)

Die diskretisierte Differentialgleichung erlaubt unphysikalische Lösungen, die sich als Gitterschwingungen, sogenannte spurious waves, ausbreiten [27]. Problematisch für die Stabilität des Runge-Kutta-Verfahrens (LDDRK) sind diese Wellen vor allem deshalb, weil sie sich mit mehrfacher Schallgeschwindigkeit ausbreiten [29]. Zur Verringerung dieser Gitterschwingungen wird eine selektive Dämpfungsfunktion eingeführt, die speziell kurzwellige Anteile mit einer der Gitterweite entsprechenden Wellenlänge entlang einer Gitterlinie herausfiltert und bedämpft.

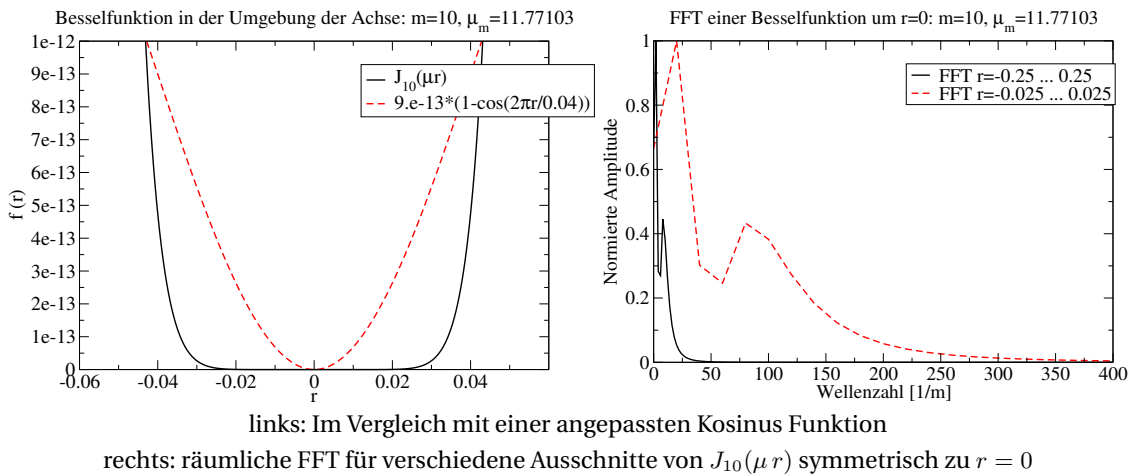
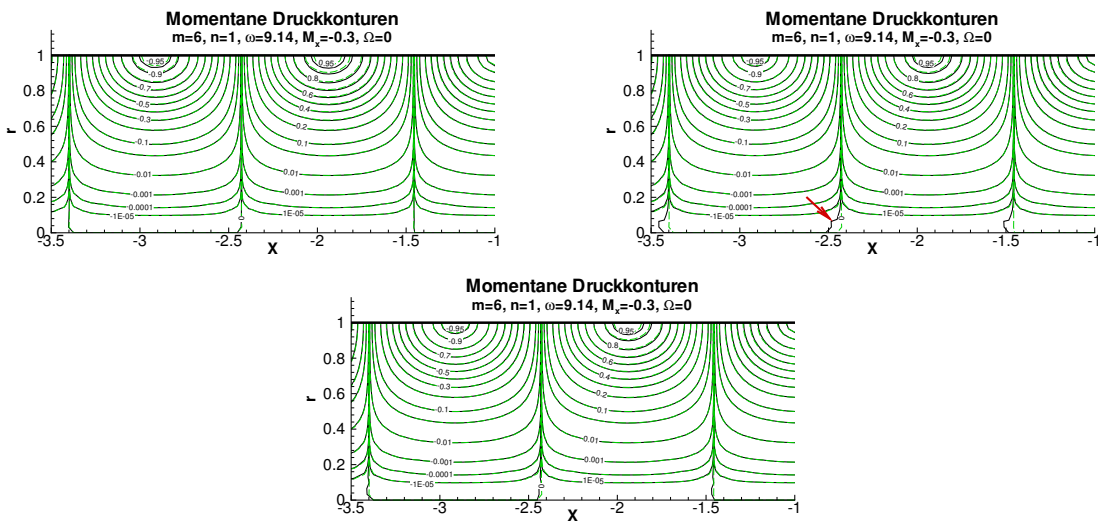


Abbildung 2: Verhalten der Bessel-Funktion 10. Ordnung an der Achse

Tam et al. [27] schlagen vor, eine Gauß-Verteilung als Vorlage für kurzwellige Schwankungen zu benutzen. Diese Vorlage wird dann in eine Fourier-Reihe entwickelt, wobei die Anzahl der Fourier-Koeffizienten auf drei beschränkt wird. Die Summe der Fourier-Koeffizienten verschwindet, so dass langwellige Störungen nicht bedämpft werden. Da die Gitterschwingungen maximal die halbe Wellenlänge des Differenzensterns haben können, wird die Gauß-Verteilung mit π normiert und um 1 zentriert. Die freien Parameter sind damit die Standardabweichung σ der Gauß-Verteilung und die Integrationsgrenze β bei der Fourier-Transformation. Die Standardabweichung wird in Anlehnung an Tam et al. [27] mit 0.2π bzw. 0.3π angenommen. Die Integrationsgrenze ist genau wie in [27] zu 0.65π gewählt worden. Die sich ergebenden Dämpfungskoeffizienten sind im Anhang ?? abgedruckt.

Die Annahmen, unter denen die künstliche, selektive Dämpfung hergeleitet wird, treffen nicht auf die Eigenlösungen in Zylinderkoordinaten zu. Die Achse ($r = 0$) der Zylinderkoordinaten lässt Lösungen zu, die speziell bei höheren Azimutalmoden eine Mischung aus vielen verschiedenen Fourier-Reihengliedern darstellen (vgl. Abbildung 2). Die Dämpfungsfunktion filtert die kurzwelligen Anteile heraus und die restlichen langwelligen Anteile erfüllen die Differentialgleichung an der Achse nicht mehr. Das Problem kann offensichtlich auch nicht durch eine Gitterverfeinerung gelöst werden, da dann noch mehr Reihenglieder abgeschnitten werden (vgl. Abbildung 2). Obwohl der Funktionswert der Bessel-Funktion kleiner wird, steigt der relative Abschneidefehler stark an, wenn das Gitter entlang der Achse verfeinert wird. Die für das DRP-Schema unoptimale Lösung ist auch dafür verantwortlich, dass ein Unterschreiten der maximal möglichen Zeitschrittweite sich zuerst durch Instabilitäten an der Achse der Zylinderkoordinaten zeigt.

Dieses Problem kann leider nicht allgemein gelöst werden, da die künstliche, selektive Dämpfung



Numerische Beispiele (Volllinie) im Vergleich mit der analytischen Lösung (gestrichelte Linie)

(links oben: ohne SAD rechts oben: mit SAD $\sigma = 0.2$
 unten: an der Achse ($r < 0.1$) keine SAD, sonst $\sigma = 0.2$)

Abbildung 3: Durch die künstliche, selektive Dämpfung verursachte Fehler

bei verzerrten und gestauchten Gittern unvermeidlich auch an der Achse angewendet werden muss. Eine mögliche Lösung des Problems kann durch die im Abschnitt 11.3 später vorgestellte Interpolation erreicht werden. Für Testfälle, bei denen das Gitter an der Achse nahezu ungestreckt und orthogonal ist, kann die künstliche, selektive Dämpfung nahe der Achse in radialer Richtung auch entfallen vgl. Abbildung 3.

5.2 Filterung

Diese Methode ist von den physikalischen Modellgleichungen entkoppelt. Sie beruht auf der Filterung von instabilen Frequenzen aus der Lösung. In einem beliebigen Zeitintervall wird durch die Anwendung eines Tiefpass-Filters das Feld jeder Variable örtlich in den gerechneten Dimensionen neu berechnet. Der Filter funktioniert nach dem gleichen Prinzip wie der für die Ableitung verwendete Differenzenstern. Die Frequenzcharakteristik muss den gleichen Forderungen wie im Fall der oben beschriebenen künstlichen Dämpfung entsprechen. Für den Verlauf der Filterkennlinie gilt Gleichung (??). Eine genaue Beschreibung von Tiefpass-Filtern für die CAA ist in [4] und [31] zu finden. Nachteilig ist bei der Filterung der zusätzliche numerische Aufwand. Er kann durch die geeignete Wahl des Zeitintervalls und des dazugehörigen Filteramplitude reduziert werden.

Im Abb. 4 sind die Kennlinien der im Rahmen dieser Diplomarbeit getesteten Filter abgebildet. Ihre Koeffizienten sind im Anhang aufgelistet.

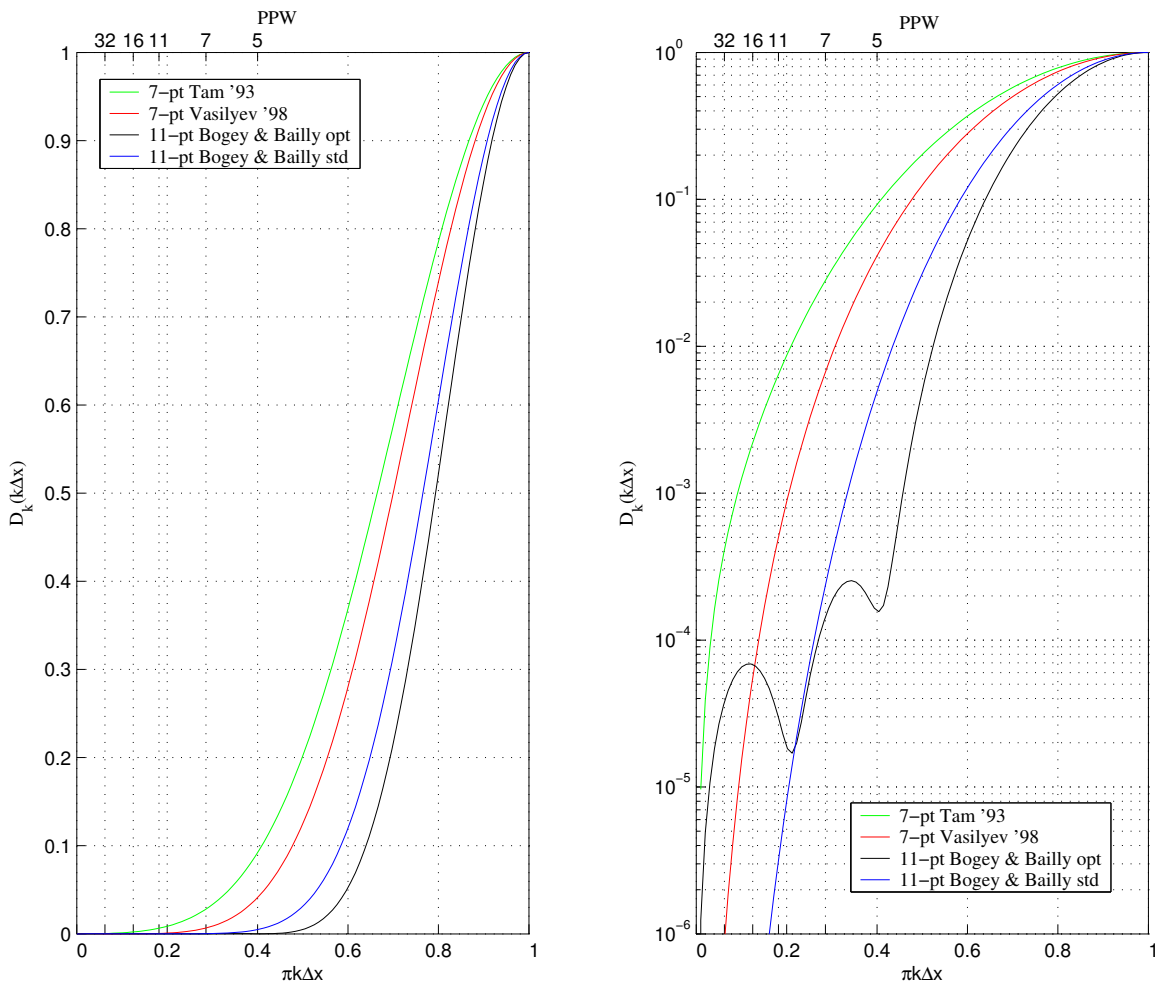


Abbildung 4: Kennlinien der getesteten Filter

6 Vergleich der Koeffizientensätze bei Differenzen- und Filterschemata

Um den Funktionsmechanismus und die Optimierungsmöglichkeiten der eingesetzten Filter- und Ableitungsschemata überschaubar darzustellen, bietet es sich an, beide Verfahren allgemein als ein digitales Filter zu betrachten. Ein derartiges Filter, wie er z. B. in der Bildverarbeitung eingesetzt wird, verstärkt oder dämpft ein diskretes Signal in Abhängigkeit von der Frequenz. Das wird durch die Faltung des diskreten Eingangssignals mit einem Satz von Koeffizienten erreicht. Bei der Faltung wird der Ausgabewert aus der gewichteten Summe der Nachbarpunkte und des gefilterten Punktes selbst berechnet. Die Koeffizienten entsprechen den Gewichten. Ihr Verlauf bestimmt folglich die Charakteristik des Filters. Um sie zu berechnen, ist es sinnvoll mittels örtlicher Fourier-Transformation in Frequenzbereich überzugehen. Die Faltung zweier Funktionen im Raum lässt sich als Multiplikation ihrer Transformaten im Frequenzbereich darstellen. Es gilt

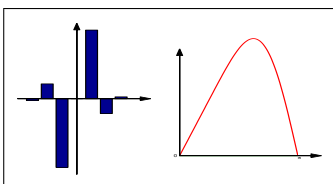
$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \quad (16)$$

$$F\{f_1(x) * f_2(x)\} = F\{f_1(x)\} \cdot F\{f_2(x)\} \quad (17)$$

Das diskrete Transformationsgesetz

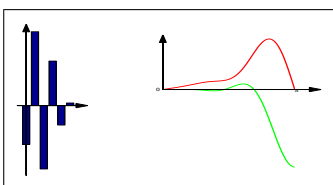
$$\bar{f}(k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j e^{-ikj} \quad (18)$$

wird auf die kammartige Koeffizientenfunktion angewendet. Es ist erkennbar, dass sich die Filterkennlinie periodisch aus einer Reihe von Sinus- und Kosinus-Funktionen und einer Konstante ($j = 0$) zusammensetzt und eine komplexe Funktion ist. Der imaginäre Teil des Filters ist für das Amplitudenverhalten verantwortlich, der reelle bestimmt dagegen die Phasenlage des gefilterten Signals (vergleiche Winkel- und Radiusdarstellung einer komplexen Zahl im Zeigerdiagramm). Wegen der Periodizität der Filterfunktion reicht es, nur den Frequenzbereich zwischen 0 und π auszuwerten. Im Folgenden werden die für CAA typische Koeffizientensätze verglichen und gedeutet. Dabei entspricht π auf der Abszisse des Frequenzdiagramms der halben Abtastfrequenz des Signals, oder einer Auflösung von 2 PPW.



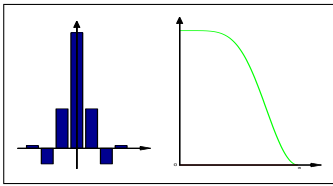
Im Bild links sind die Koeffizienten des symmetrischen, optimierten Finite-Differenzen-Schemas dargestellt. Die Punktsymmetrie ergibt nur imaginäre Sinus-Anteile in der Filterkennlinie, der Realteil ist Null und nicht sichtbar. Der nutzbare Bereich des Schemas liegt etwa zwischen 0 und $\pi/3$. Dort approximiert die Kennlinie die lineare Funktion ik , die als Faktor bei der Ableitung von e^{ikx} entsteht, ausreichend genau. Das

Ziel der Optimierung ist es, diesen linearen Bereich möglichst zu erweitern.

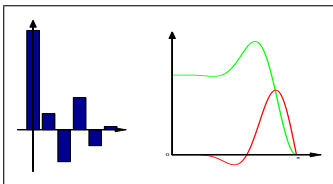


Diese Koeffizienten bilden ein asymmetrisches Ableitungsschema (*upwind stencil*) und wurden optimiert. Das Schema wird im äußersten Punkt der Randzone des Rechengebiets eingesetzt. Es hat die gleiche Funktion wie im oberen Fall. Die asymmetrische Form erlaubt es jedoch nicht, den Realteil zu Null setzen. Bei der Optimierung versucht man den Imaginärteil im Nutzbereich möglichst einer Geraden anzupassen und gleichzeitig den Realteil zu minimieren. Ein positiver Realteil führt zum Anwachsen der

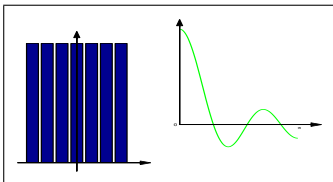
Lösung und muss vermieden werden.



In der Abbildung sind Koeffizienten eines symmetrischen Tiefpassfilters dargestellt. Ihre völlige Symmetrie ergibt eine reine Kosinusreihe als Filterkennlinie. Der Imaginärteil ist gleich Null. Bei der Optimierung ist man bestrebt, die Steilheit des Übergangs zwischen dem Durchlass- und dem Sperrbereich zu erhöhen. Um auf eine zu Abschnitt ?? äquivalente Darstellung der Filterkennlinie zu kommen, muss diese an der Frequenzachse gespiegelt und um Eins nach oben verschoben werden.



Ähnlich dem oberen Fall handelt es sich um einen Tiefpassfilter. Die Koeffizienten sind asymmetrisch und eignen sich für den Einsatz am Rand des Rechengebiets. Durch die Asymmetrie wird die Phase des gefilterten Signal beeinflusst. Durch das Überschwingen der Kennlinie im Übergangsbereich ist der Filter in der Form nicht einsetzbar, da er zu Instabilität führt. Gefordert ist bei diesem Filter eine steile Kennlinie im Übergangsbereich, Stabilität und ein neutrales Phasenverhalten im Durchlassbereich. Der Einsatz asymmetrischer Tiefpassfilter ist wenig verbreitet.



Als letztes Beispiel dient ein einfacher Mittelungsfiler. Hier sind alle Koeffizienten gleich und positiv. Die Tiefpass-Eigenschaften werden aus der Filterkennlinie deutlich. Die Reduzierung dieses Schemas auf den mittleren Koeffizienten läuft schließlich auf eine einfache Multiplikation mit dem Koeffizienten hinaus. Alle Frequenzen werden gleich behandelt. Die Kennlinie eines solchen Filters entspricht der Fourier-Transformierten der δ -Funktion.

7 Implementierung der Wand-Randbedingung (schallhart)

An einer schallharten Wand wird die an das Störungsfeld gestellte Bedingung mit Hilfe von virtuellen Punkten in der Wand, sogenannten Ghostpoints, eingebracht [29]. Verfahren höherer Ordnung verlangen einen weiteren Freiheitsgrad an der Wand, um die Nichtdurchströmungsbedingung zu erfüllen. Üblicherweise wird nur der Druck im Ghostpoint zur Einbringung des Freiheitsgrades benutzt. Die Forderung nach einem Verschwinden der Normalengeschwindigkeit in der Wand für alle Zeiten wird durch eine Anpassung des Drucks im virtuellen Punkt bewerkstelligt. Die Gleichung, welche beide Größen verknüpft ist die Impulsbilanz (skalar multipliziert mit dem Normalenvektor der Wand). Zur Erfüllung einer Haftbedingung wäre ein weiterer Freiheitsgrad notwendig, in dem die Forderung nach einem Verschwinden der Geschwindigkeit tangential zur Wand über eine Anpassung der Wandschubspannung erfüllt wird.

Ein virtueller Punkt in der Wand ist in Abbildung 5 schematisch zu erkennen. Die zur Berechnung dieser virtuellen Punkte möglichen Konzepte werden im folgenden Abschnitt erläutert.

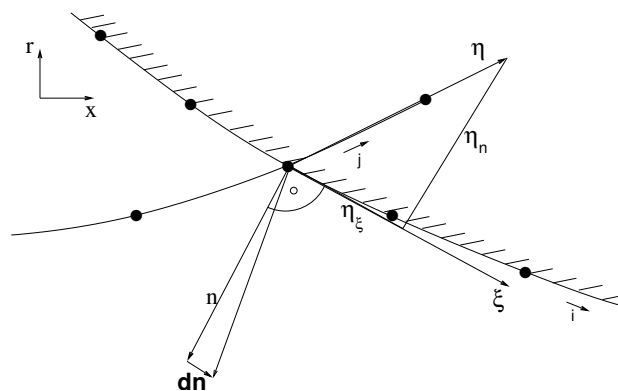


Abbildung 5: Der Normalenvektor an einer Wand entlang der i -Koordinaten Linie

Die ideal schallharte Wand ist nicht durchströmt und ändert unter der Einwirkung des Schalldrucks ihre Position nicht. Die Nachgiebigkeit der Wand ist Null. Die Normalenkomponente des Geschwindigkeitsvektors muss an der Wand verschwinden, um eine unendlich starre nicht durchströmte Wand zu modellieren.

$$\underline{n} \cdot \underline{u}' = 0 \quad (19)$$

Weiche Wände würde man nicht über eine Änderung des Normalenvektors und die Bewegung der Wand, sondern über eine komplexe Impedanz, welche Phasenlage und Amplitudenverhältnisse zwischen Druck und Dichte wiedergibt modellieren. Mehr dazu folgt später im Script.

Die Grundströmung darf bei korrekter Modellierung ebenfalls keine Normalenkomponente der Geschwindigkeit an der Wand zulassen. Sie kann, wie im Kapitel ?? gezeigt wurde, im Allgemeinen reinbungsbehaftet sein. Zusätzlich kann das Verschwinden des Geschwindigkeitsvektors der Grundströmung an der Wand gefordert werden, wenn die Reibungsterme in der Grundströmung berücksichtigt werden. Die Modellierung der Störungsausbreitung vernachlässigt solche Reibungseffekte, daher gilt für die Geschwindigkeitskomponenten der Störung nur die Nichtdurchströmungsbedingung (Slip-Wall).

Im Allgemeinen liegt die Koordinatenrichtung, in der der Ghostpoint eingebracht wird, nicht senkrecht zur Wand, wie es in Abbildung (5) schematisch dargestellt ist. Die bisherige Implementierung der Wand-Randbedingung ging jedoch von einer solchen orthogonalen Konfiguration aus. Zusätzlich wurde die Änderung des Normalenvektors entlang der Wand (dn in Abbildung 5) und etwaige

Gradienten der Grundströmung, beispielsweise in einem Staupunkt, vernachlässigt. Im folgenden Abschnitt wird die Formulierung der Wand-Randbedingung um die ursprünglich vernachlässigten Terme erweitert.

7.1 Indirekte Bestimmung

Das mittlere Strömungsfeld muss eine verschwindende Normalenkomponente der Geschwindigkeit an der Wand haben. Anderenfalls muss eine kleine Störung der mittleren Geschwindigkeit einen Gleichanteil beinhalten. Das steht im Widerspruch zur Definition der beiden Anteile. Daher muss sowohl der Gleichanteil als auch der Schwankungsanteil einzeln die Wand-Randbedingung erfüllen. Die Impulsbilanz (77), multipliziert mit dem Normalenvektor der Wand, liefert eine Bedingung an den Gradienten der Druckstörung in Richtung des Normalenvektors.

$$\underline{n} \cdot \left(\frac{D \underline{u}'}{Dt} \right) + \underline{n} \cdot \left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \bar{\underline{U}} \cdot \nabla \bar{\underline{U}} \right) + \underline{n} \cdot (\underline{u}' \cdot \nabla \bar{\underline{U}}) + \underline{n} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' = 0 \quad (20)$$

Die Wand soll ideal starr sein, daher ändert sich der Normalenvektor nicht mit der Zeit. Der Normalenvektor kann in die Zeitableitung gezogen werden. Außerdem wird die Abkürzung $\nabla_n := \underline{n} \cdot \nabla$ für die Normalenableitung eingeführt. Die Zeitableitung der Normalengeschwindigkeit verschwindet an der nicht durchströmten Wand. Die Bedingung, die an die Normalenableitung der Druckschwankung gestellt werden muss, lautet also:

$$\nabla_n p' = -\bar{\rho} \bar{\underline{U}} \cdot \nabla \underline{u}' \cdot \underline{n} - \rho' \bar{\underline{U}} \cdot \nabla \bar{\underline{U}} \cdot \underline{n} - \bar{\rho} \underline{u}' \cdot \nabla \bar{\underline{U}} \cdot \underline{n} \quad (21)$$

Das ist bereits das Ergebnis, wenn die Information, dass die Größen der mittleren Strömung die Randbedingung erfüllen, nicht benutzt werden soll. Die Normalenableitung des Drucks ist als Funktion von Ableitungen der Schwankungsgrößen und der Grundströmung gegeben. Da diese Größen alle bekannt sind, ist damit eine Berechnung des Drucks in einem virtuellen Punkt hinter der Wand möglich, der für eine Erfüllung der Randbedingung im nächsten Zeitschritt sorgt.

Im Gegensatz zu der normalerweise verwendeten Randbedingungen wird die Krümmung der Wand in Form der Änderung des Normalenvektors berücksichtigt. Die Ableitung des Normalenvektors $d\underline{n}$ ist in Abbildung 5 dargestellt. Die Berechnung erfolgt entlang der Wand, die einer Koordinatenlinie im körperangepassten Gitter entspricht. Die Lage der entsprechenden ko- und kontravarianten Koordinaten des Rechengebiets sind ebenfalls dargestellt. Da im Allgemeinen das Gitter nicht orthogonal zur Wand gelegt werden kann, wird der errechnete Druckwert um die Komponente parallel zum Gitter korrigiert. Die Korrektur addiert die Ableitung des Drucks entlang der Wand zu dem errechneten Wert der Ableitung des gestörten Drucks, um einen Wert in der Position des virtuellen Punktes zu erhalten. Die Ableitung wird in der natürlichen Basis des Rechengitters vorgenommen. Die Darstellung lautet für die Normalenableitung von p' wie folgt:

$$\nabla_n p' = \underline{n} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Umgestellt nach der Ableitung nach η oder ξ ergibt sich die Bestimmungsgleichung für den Druck im virtuellen Punkt in der Wand.

$$\frac{\partial p'}{\partial \eta} = \frac{1}{(n_x \eta_x + n_r \eta_r)} \left[\nabla_n p' - (n_x \xi_x + n_r \xi_r) \frac{\partial p'}{\partial \xi} \right] \quad (23)$$

Der Normalen-Einheitsvektor \underline{n} steht senkrecht zur Koordinatenlinie der Wand, wobei die Orientierung des Normalenvektors in der oben gegebenen Formulierung keine Rolle spielt. Er kann aus

der kovarianten Basis bestimmt werden. Danach wird die räumliche Diskretisierung rückwärts angewendet, um einen Druck im Ghostpoint zu berechnen. Es ergibt sich folgende Gleichung für den Wandpunkt mit dem Index w :

$$p'_w = \frac{\partial p'}{\partial \eta} - \frac{1}{a_1} \sum_{i=w+1}^{w+7} a_i p'_i \quad (24)$$

Der indirekte Weg zur Bestimmung des Drucks im Ghostpoint ist kompliziert. Zusätzlich zu jeder Option bei der Auswahl der Differentialgleichung für die Geschwindigkeiten (vgl. Tab. ??) ist eine Implementierung für den virtuellen Punkt notwendig, wenn der indirekte Weg zur Bestimmung gewählt wird. Die schrittweise Bestimmung der Normalenableitung und der Ableitung der Geschwindigkeitskomponenten nach der Zeit auf dem indirekten Weg ist anfällig gegen Rundungsfehler. Die Berücksichtigung der künstlichen Dämpfung im Feld und im Bereich der nicht reflektierenden Pufferzonen würde das System noch wesentlich komplizierter machen. Bleiben die Terme unberücksichtigt, ergibt sich ein Fehler, der zu einer Inkonsistenz der Randbedingung führt. Daher ist diese Art der Randbedingung nur stabil, wenn vor jedem Zeitschritt die Normalengeschwindigkeit auf Null zurückgesetzt wird, wie es in Tam and Dong [29] beschrieben ist. Außerdem ist eine Sonderbehandlung der Wand bei der Implementierung der künstlichen, selektiven Dämpfung (SAD) notwendig. Da der Aufwand und das Ergebnis bei dieser Form der Implementierung nicht zufriedenstellend in Einklang zu bringen sind, wurde eine bessere Implementierung der Wand-Randbedingung gesucht.

7.2 Direkte Bestimmung

Mit dem Ziel eine einfache und gleichzeitig generelle Formulierung für die Wand-Randbedingung zu finden, wurde die Bestimmungsgleichung für den virtuellen Wandpunkt nochmals untersucht. Maßgeblich ist dabei die Berücksichtigung der künstlichen Dämpfung, wie auch der veränderten Differentialgleichung durch die nicht reflektierenden Randbedingungen. Dabei sollen möglichst viele der bereits implementierten Funktionen benutzt werden, um den Rundungsfehler durch unterschiedliche Wege der Berechnung möglichst gering zu halten. Gleichzeitig sinkt der Aufwand und die Fehleranfälligkeit bei einer Änderung an der Differentialgleichung. Die im Programm gelöste Differentialgleichung wird durch die physikalischen und numerischen Flussterme wie folgt dargestellt:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \underline{F}_{phys.}(q) + \underline{F}_{Rand}(q) + \underline{F}_{SAD}(q) \quad (25)$$

$\underline{F}_{Rand}(q)$ und $\underline{F}_{SAD}(q)$ kennzeichnen dabei die zusätzlichen Flussterme in der künstlichen Pufferzone, die als Randbedingung am offenen Ende verwendet wird, und durch die SAD. Die Randbedingung soll für die numerische Lösung auch in einer gedämpften Randzone erfüllt werden. Daher muss die gleiche Bedingung wie bei der indirekten Bestimmung (Gl. (20)) für die numerisch bestimmte Zeitableitung gelten. Der einfachste Weg zur Bestimmung ist den vorherigen Druck für den virtuellen Wandpunkt zunächst beizubehalten und die Zeitableitungen an der Wand zu bestimmen. Der aktuelle Druck im Ghostpoint kann dann im Anschluss aus dem errechneten Fehler bestimmt werden. Die mit dem vorherigen Druck im Ghostpoint (mit \hat{p}'_w) bestimmte Zeitableitung von u' und v' wird benutzt, um den neuen Druck im virtuellen Punkt zu bestimmen. Dazu wird der Differenzenstern einmalig umgekehrt angewendet:

$$p'_w = \hat{p}'_w - \frac{\bar{\rho} (n_x \frac{\partial \hat{u}'}{\partial t} + n_r \frac{\partial \hat{v}'}{\partial t})}{a_w (n_x \eta_x + n_r \eta_r)} \quad (26)$$

Das Ziel ist möglichst viele bereits implementierte Routinen zu benutzen. Es kann erreicht werden, indem die fehlerbehaftete Zeitableitung mit der bereits implementierten Routine zur Berechnung der Flüsse bestimmt wird. Damit diese nicht doppelt aufgerufen werden muss, wird nach der Korrektur des virtuellen Wendepunkts, die gesamte Wandschicht mit vier Punkten korrigiert. Dazu müssen nur die Differentialgleichungen in x - und r -Richtung nochmals aufgerufen werden. Dabei wird aber nur mit der Änderung der Ableitung des Drucks durch den Korrekturdruck p'_k eingegeben und die anderen Ableitungen Null gesetzt.

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_k = \frac{a_j}{a_w} \eta_x \frac{\bar{\rho} (n_x \frac{\partial \dot{u}'}{\partial t} + n_r \frac{\partial \dot{v}'}{\partial t})}{(n_x \eta_x + n_r \eta_r)} \quad (27)$$

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial r}\right)_k = \frac{a_j}{a_w} \eta_r \frac{\bar{\rho} (n_x \frac{\partial \dot{u}'}{\partial t} + n_r \frac{\partial \dot{v}'}{\partial t})}{(n_x \eta_x + n_r \eta_r)} \quad (28)$$

Die direkte Bestimmung des Drucks im Ghostpoint bietet weiterhin den Vorteil, dass das Koordinatennetz nicht orthogonal zur Wand sein muss. Bei der Bestimmung des Normalenvektors zur Wand muss lokal die Richtung einer Tangente an die Wand gebildet werden. Der Normalenvektor wird anschließend aus der Tangente durch Drehung um 90° gewonnen. Im dreidimensionalen Fall lässt sich das gleiche Resultat mit Hilfe des Kreuzprodukts erzielen. Die Formulierung für den virtuellen Punkt ist richtungsunabhängig und stellt die gleichen Anforderungen an das Gitter wie das innere Feld. Insbesondere entspricht die Wand-Randbedingung in dieser Form exakt dem in Tam and Dong [29] vorgeschlagenen Vorgehen.

Im Übrigen ist es gar nicht notwendig den Druck im Wandpunkt zu speichern, sondern es kann nach der Berechnung der inneren Punkte mit einem Druck im Ghostpoint von Null eine Korrektur für alle betroffenen Punkte erfolgen. Dazu wird der Fehler der Geschwindigkeitsableitung berechnet, und daraus der Druck im virtuellen Punkt bestimmt, bei dem die Geschwindigkeit verschwindet. Mit diesem Druck wird die fehlende Ableitung für die die wandnächsten Punkte bestimmt und die Flüsse der Geschwindigkeitskomponenten und bei Gradienten in der Strömung auch der Druck korrigiert.

8 Typen der Euler-Gleichungen

In diesem Kapitel wird ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen ein mathematisches Modell zur Berechnung der Ausbreitung kleiner Störungen abgeleitet. Zur Beschreibung der Störungsausbreitung im Flugtriebwerk erweist sich die Formulierung in Zylinderkoordinaten als besonders sinnvoll. Im folgenden Abschnitt werden die Strömungsgrößen in eine dimensionslose Form gebracht. Der Vorteil dieses Vorgehens ist, dass die Größenordnung aller Variablen angeglichen wird. Gleichzeitig wird eine Reihe von ähnlichen Problemen erzeugt, die durch eine einzige Simulation zugänglich sind. Im nächsten Schritt werden kleine Abweichungen vom mittleren Zustand zugelassen, um Gleichungen für die Ausbreitung kleiner Störungen zu erhalten. Der mittlere Zustand (die Grundströmung) wird als eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen angenommen, daher lässt sich dieser Anteil abspalten. Unter der Annahme kleiner Störungen entfallen die Terme von höherer Ordnung in den Störgrößen. Das Ergebnis sind die linearisierten Eulergleichungen, wobei die Grundströmung eine stationäre Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mit Wärmezufuhr oder -abfuhr ist. Die Annahme einer axialsymmetrischen Grundströmung ermöglicht im letzten Schritt eine Vereinfachung des dreidimensionalen Problems für die Schallausbreitung auf eine Reihe von Differential-Gleichungs-Systemen (DGLS) von zwei unabhängigen Variablen. In den entkoppelten zweidimensionalen Gleichungen ist die Winkelkoordinate φ als unabhängige Variable durch die Nummer der Azimutalmode m ersetzt. Durch die Nutzung der cut-off Bedingung wird am Ende das zu simulierende Problem auf den ausbreitungsfähigen Teil der Azimutalmoden eingegrenzt.

8.1 Die Grundgleichungen

Die Grundgleichungen werden hier entsprechend Spurk [24] und Rienstra and Hirschberg [22] als Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie am raumfesten Volumenelement aufgestellt.

8.1.1 Massenbilanz

Die Bilanzierung der Masse in einem raumfesten Volumen führt direkt auf die Kontinuitätsgleichung. Sie lässt sich in Worten formulieren als

$$\begin{bmatrix} \text{Änderung} \\ \text{der} \\ \text{Masse} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Zufluss} \\ \text{von} \\ \text{Masse} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Abfluss} \\ \text{von} \\ \text{Masse} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Die Massenbilanz eines Fluidvolumens wird mit Hilfe von Dichte $\tilde{\rho}$, Druck \tilde{p} und dem Geschwindigkeitsvektor $\tilde{\underline{u}}$ wie folgt notiert (vgl. [24, 32]):

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}} = 0 \quad (30)$$

Die Tilde kennzeichnet physikalische Größen, die im Gegensatz zu den später eingeführten dimensionslosen Zustandsgrößen, aus einem Wert und der zugehörigen physikalischen Einheit zusammengesetzt sind. Zur weiteren Abkürzung der Schreibweise bei der Herleitung der Gleichungen für die Ausbreitung kleiner Störungen ist die Einführung der materiellen Ableitung (material derivative) sinnvoll:

$$\frac{\tilde{D}(\cdot)}{\tilde{D}\tilde{t}} := \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla}(\cdot) \quad (31)$$

Gl. (30) lässt sich mit Hilfe der materiellen Ableitung wie folgt abgekürzt schreiben:

$$\frac{\tilde{D}\tilde{\varrho}}{\tilde{D}\tilde{t}} + \tilde{\varrho}\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\underline{u}} = 0 \quad (32)$$

Damit ist die erste Gleichung gefunden, die Dichte und Geschwindigkeitskomponenten miteinander verknüpft.

8.1.2 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Die Impulsbilanz eines Fluidelements liefert drei weitere Differentialgleichungen zur Bestimmung der fünf unbekanntenen Strömungsgrößen, wobei bereits der Newtonsche Schubspannungsansatz als Materialgleichung eingesetzt wurde. Der Impulsbilanz lässt sich in Worten formulieren als

$$\left[\begin{array}{c} \text{Änderung} \\ \text{des} \\ \text{Impulses} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Zufluss} \\ \text{von} \\ \text{Impuls} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Abfluss} \\ \text{von} \\ \text{Impuls} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Summe} \\ \text{angreifender} \\ \text{Kräfte} \end{array} \right] \quad (33)$$

Zusätzlich zu den bei der Notation der Massenbilanz eines Fluidelements eingeführten Termen, fließen in die Impulsbilanz der viskose Spannungstensor $\tilde{\underline{\tau}}$ und die Volumenkräfte \underline{K} ein. Die Navier-Stokes-Gleichungen werden allgemein wie folgt notiert (vgl. [22]):

$$\tilde{\varrho}\left(\frac{\partial\tilde{\underline{u}}}{\partial t} + \tilde{\underline{u}}\cdot\tilde{\nabla}\tilde{\underline{u}}\right) = \tilde{\varrho}\underline{K} - \tilde{\nabla}\tilde{p} + \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\underline{\tau}} \quad (34)$$

Die Volumenkräfte \underline{K} werden vernachlässigt, da weder hydrostatische Effekte noch magnetische Volumenkräfte für die Strömung des Gases in Flugtriebwerken eine Rolle spielen. Die Oberflächenkräfte auf das Volumenelement wurden bereits in einen Anteil aus dem Druck normal zum Oberflächenelement und den dissipativen Anteil im Spannungstensor $\tilde{\underline{\tau}}$ aufgespalten. Mit Hilfe der kinematischen Viskosität μ , der Volumenviskosität $\lambda = \frac{2}{3}\mu$ und des Einheitstensors \underline{E} unter Annahme einer konstanten Viskosität lautet die Ableitung des viskosen Spannungstensors:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\underline{\tau}} &= \tilde{\nabla}\cdot\left(\mu(\tilde{\nabla}\tilde{\underline{u}} + \tilde{\underline{u}}\tilde{\nabla}) - \lambda\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\underline{u}}\underline{E}\right) \\ &= \tilde{\nabla}\times[\mu(\tilde{\nabla}\times\tilde{\underline{u}})] + \frac{4}{3}\tilde{\nabla}(\mu\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\underline{u}}) \\ &= -\mu[\tilde{\nabla}\cdot(\tilde{\nabla}\tilde{\underline{u}}) - \Delta\tilde{\underline{u}}] + \frac{4}{3}\mu\tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\underline{u}}) \end{aligned} \quad (35)$$

Der Spannungstensor $\tilde{\underline{\tau}}$ wird hier nur der Vollständigkeit halber mit angegeben, jedoch für die Störungsausbreitung später vernachlässigt. Mit der materiellen Ableitung wird die Impulsbilanz daher wie folgt geschrieben:

$$\frac{\tilde{D}\tilde{\underline{u}}}{\tilde{D}\tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{\varrho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} = \frac{1}{\tilde{\varrho}}\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\underline{\tau}} \quad (36)$$

Bei Vernachlässigung aller viskosen Terme wird aus dem elliptischen Gleichungssystem der Navier-Stokes-Gleichungen ein für Unterschall hyperbolisches System. Die sogenannte Eulergleichung findet häufig in der Gasdynamik Anwendung, hat jedoch schwierige numerische Eigenschaften. Sie wird aufgrund der Euler-schen Formulierung im raumfesten, nicht materiellen (Lagrange) Volumen auch Euler-sche Bewegungsgleichung des Fluids genannt.

8.1.3 Energiebilanz

Zur Formulierung der letzten Gleichung wird die Gesamtenergie bilanziert. Die Bilanz lautet in Worten

$$\left[\begin{array}{c} \text{Änderung} \\ \text{innerer und} \\ \text{kinetischer} \\ \text{Energie} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Zu- und Abfluss} \\ \text{von} \\ \text{Energie} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Zu- und Abfluss} \\ \text{durch} \\ \text{Wärmeleitung} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Leistung} \\ \text{angreifender} \\ \text{Kräfte} \end{array} \right] \quad (37)$$

Die allgemeine Form der Bilanzgleichung der Energie eines Fluidelements liefert einen Zusammenhang zwischen der spezifischen Gesamtenergie \tilde{e} und dem Wärmefluß \tilde{q} , sowie den dissipativen Termen (vgl. [22]).

$$\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{e}}{\partial t} + \tilde{\rho} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{e} \tilde{\underline{u}}) = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}} - \tilde{\nabla} \cdot (p \tilde{\underline{u}}) + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\underline{\tau}} \cdot \tilde{\underline{u}}) \quad (38)$$

Die spezifische Enthalpie ist gegeben durch:

$$\tilde{h} = \tilde{e} - \frac{1}{2} \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\underline{u}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \quad (39)$$

Die Ausbreitung der bei der Verbrennung entstehenden Schallwellen und Entropieschwankungen wird durch den zweiten Hauptsatz in reversibler Form beschrieben. Für die Verbrennung selbst kann dieses Modell nicht eingesetzt werden. Die spezifische Entropie, erweist sich damit als besonders geeignete Größe zur Beschreibung der Ausbreitung kleiner Störungen. Sie ist durch die Gibbs-Gleichung für einen reversiblen thermodynamischen Prozess gegeben:

$$T d\tilde{s} = d\tilde{h} - \frac{d\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \quad (40)$$

Gl. (40) bedeutet scheinbar eine Einschränkung auf einen reversiblen Prozess für das gesamte Strömungsfeld. Diese Einschränkung lässt sich aufheben, wenn man die Entropieproduktion auf die Grundströmung beschränkt. Daraus folgt für das totale Differential der spezifischen Gesamtenergie:

$$d\tilde{e} = T d\tilde{s} - \tilde{\underline{u}} \cdot d\tilde{\underline{u}} - \tilde{p} d\tilde{\rho}^{-1} \quad (41)$$

Die Gleichung (41) wird benutzt um in Gl. (38) die Gesamtenergie zu eliminieren. Nach dem Einsetzen der Gln. (30) und (34) folgt (vgl. [22]):

$$\rho T \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} + \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{s} \right) = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}} + \tilde{\underline{\tau}} : \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} \quad (42)$$

Die Differentialgleichung für die spezifische Entropie wird mit der materiellen Ableitung wie folgt notiert:

$$\rho T \frac{\tilde{D} \tilde{s}}{\tilde{D} t} = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}} + \tilde{\underline{\tau}} : \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} \quad (43)$$

Darüber hinaus wird das Fluid als zweiatomiges ideales Gas angenähert, so dass die Entropie mit Hilfe von Gl. (40) und den thermodynamischen Beziehungen aus Müller [19] durch Druck und Dichte ersetzt werden kann. Im Folgenden bezeichnen C_p und C_v die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck bzw. bei konstantem Volumen. Die Umschreibung benötigt die spezifische Gaskonstante \mathcal{R} und den Adiabatenexponenten (ratio of the specific heats) γ , gebildet als

Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten. Für ein ideales Gas sind C_p und C_v konstant. Für zweiatomige ideale Gase mit fünf Freiheitsgraden ($f = 5$) ergeben sich diese Konstanten zu:

$$C_v = \frac{f}{2} \mathcal{R} = \frac{5}{2} \mathcal{R} \quad (44)$$

$$C_p = \left(1 + \frac{f}{2}\right) \mathcal{R} = \frac{7}{2} \mathcal{R} \quad (45)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{2}{f} = \frac{7}{5} \quad (46)$$

Mit dem totalen Differential der Enthalpie und der idealen Gasgleichung

$$d\tilde{h} = C_p dT \quad (47)$$

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{\varrho}} = \mathcal{R} T \quad (48)$$

$$\text{für Luft: } \mathcal{R} = C_p - C_v = 286.73 \frac{J}{kg K} \quad (49)$$

lässt sich die Gibbs-Gleichung (40) nun umschreiben zu:

$$d\tilde{s} = C_v \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}} - C_p \frac{d\tilde{\varrho}}{\tilde{\varrho}} \quad (50)$$

Bis hierhin entsprechen die Ableitungen dem Vorgehen in Rienstra and Hirschberg [22]. Die Gleichung (43) wird nun weiter umgeformt, um eine Differentialgleichung für die Zeitableitung des Drucks zu erhalten. Einsetzen der Massenbilanz (32) liefert die gesuchte Beziehung:

$$\varrho T \frac{C_v}{p} \left(\frac{\tilde{D}\tilde{p}}{\tilde{D}\tilde{t}} - \gamma \frac{\tilde{p}}{\tilde{\varrho}} \underbrace{\left(\frac{\tilde{D}\tilde{\varrho}}{\tilde{D}\tilde{t}} \right)}_{= -\tilde{\varrho} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}}} \right) = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\tau} : \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} \quad (51)$$

Unter Berücksichtigung aller Vereinfachungen ergibt sich:

$$\varrho T \frac{C_v}{p} \left(\frac{\tilde{D}\tilde{p}}{\tilde{D}\tilde{t}} + \gamma \tilde{p} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right) = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\tau} : \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} \quad (52)$$

Die Gleichung (52) ist der Massenbilanz (32) sehr ähnlich. Bei Vernachlässigung der Reibung und Wärmeleitung ergibt sich eine Gleichung für den Druck, die sich nur im Adiabatenexponenten vor der Geschwindigkeitsdivergenz von einer Kontinuitätsgleichung unterscheidet, in der $\tilde{\varrho}$ durch \tilde{p} ersetzt wurde.

8.2 Dimensionslose Größen

Die Einheitsgrößen werden als globale d. h. zeitliche und räumliche Konstanten eingeführt, so dass ihre Ableitungen nach den unabhängigen Variablen verschwinden. Die dimensionsbehafteten Größen sowie die entsprechende Einheitsgröße sind in Tabelle 5 zusammengestellt.

Die Kontinuitätsgleichung (32), die Impulsgleichungen (36) und Gl. (52) werden auf die dimensionslosen Größen ohne Tilde umgeschrieben. Der Nabla-Operator wird mit der räumlichen Einheitsgröße R entdimensionalisiert. Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{D}\tilde{\varrho}}{\tilde{D}\tilde{t}} + \tilde{\varrho} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ &= \frac{a_\infty}{R} \frac{D\varrho_\infty}{Dt} + \frac{1}{R} \varrho_\infty \varrho \tilde{\nabla} \cdot (a_\infty \mathbf{u}) \\ &= \frac{a_\infty \varrho_\infty}{R} \left(\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right) = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Tabelle 5: Dimensionslose Größen und deren physikalische Einheiten

Größe	Physikalische Einheitsgröße	SI-Einheit	Beschreibung	Maß
\tilde{x}, \tilde{r}	R	m	Rohrradius an der Schallquelle	Längenmaß
\tilde{c}, \tilde{u}	a_∞	$\frac{m}{s}$	Schallgeschwindigkeit in der Außenströmung	Geschwindigkeitsmaß
$\tilde{\varrho}$	ϱ_∞	$\frac{kg}{m^3}$	Dichte des Fluids in der Außenströmung	Dichtemaß
\tilde{t}	$\frac{R}{a_\infty}$	s		Zeitmaß
$\tilde{f}, \tilde{\omega}$	$\frac{a_\infty}{R}$	s		Frequenzmaß
\tilde{p}	$\varrho_\infty a_\infty^2$	Pa		Druckmaß
$\tilde{\mu}$	$a_\infty R$	$\frac{m^2}{s}$		Maß für die Viskosität

Die Impulsgleichung (36) wird umgeformt, indem die gesamte Gleichung mit $\frac{a_\infty^2}{R}$ dimensionslos gemacht wird. Diese Größe hat die Einheit einer Beschleunigung.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D} \tilde{u}}{\tilde{D} t} + \frac{1}{\tilde{\varrho}} \nabla \tilde{p} \\ = \frac{a_\infty^2}{R} \left(\frac{D \underline{u}}{D t} + \frac{1}{\varrho} \nabla p \right) = \frac{a_\infty^2}{R} \left(\frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \underline{\tau} \right) \end{aligned} \quad (54)$$

Aus der dimensionslosen Druckgleichung wird die Druckgleichung für dimensionsbehaftete Größen (52) wieder gewonnen, indem sie mit $\frac{\varrho_\infty a_\infty^3}{R}$ multipliziert wird. Zuvor wird die Temperatur mit Hilfe der idealen Gasgleichung (48) durch Druck und Dichte ersetzt. Diese Größe hat die Einheit $N \frac{m}{s}$ und entspricht damit einer Leistung.

$$\frac{5}{2} \frac{\varrho_\infty a_\infty^3}{R} \left(\frac{D p}{D t} + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} \right) = \frac{\varrho_\infty a_\infty^3}{R} \left(-\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \nabla \underline{u} \right) \quad (55)$$

Die Einheitsgrößen wurden konstant für das gesamte Strömungsfeld definiert. Damit die Entdimensionalisierung sinnvolle Ergebnisse liefert, müssen die Einheitsgrößen von Null verschieden sein. Mit diesen Annahmen ist es möglich aus dem Differentialgleichungssystem für die dimensionsbehafteten Größen ein entsprechendes dimensionsloses System abzuleiten.

$$\frac{D \varrho}{D t} + \varrho \nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (56)$$

$$\frac{D \underline{u}}{D t} + \frac{1}{\varrho} \nabla p = \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \underline{\tau} \quad (57)$$

$$\frac{D p}{D t} + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} = -\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \nabla \underline{u} \quad (58)$$

Die Aussagen für die dimensionslosen Strömungsgrößen in den Gleichungen (56) – (58) entsprechen exakt den in den Gleichungen (32), (36) und (52) dargestellten Zusammenhängen. Die Normierung wird rückgängig gemacht und damit physikalische Größen gewonnen, indem die dimensionslosen Größen mit der entsprechenden Einheitsgröße multipliziert werden. Die dimensionslosen Differentialgleichungen haben den Vorteil, dass eine Reihe von ähnlichen Problemen, die sich nur durch ihre Normierung voneinander unterscheiden, geschaffen wird. Diese Ähnlichkeit macht zusätzliche Berechnungen überflüssig, wenn sich nur die Skalierung ändert.

8.3 Linearisierung für kleine Störungen

Die fünf verbliebenen Größen zur Beschreibung des Strömungszustands werden zunächst in einen Gleich- und einen Schwankungsanteil aufgespalten.

$$\text{z. B. } \varrho = \bar{\varrho} + \varrho' \quad (59)$$

Die mittlere Zustandsgröße ist mit einem Überstrich gekennzeichnet. Eine kleine Abweichung von der mittleren Größe wird durch die gestrichene Notation markiert. Die Störgröße wird als klein angenommen, so dass die Terme höherer Ordnung in den Störgrößen vernachlässigbar gegenüber den Produkten aus mittleren Größen und Störgrößen sind. Der Spannungstensor enthält als Vorfaktor die inverse Reynoldszahl gebildet mit der Schallgeschwindigkeit und dem Rohrradius. Bei niedrigen Frequenzen ist der dissipative Anteil der Störgrößen daher von quadratischer Ordnung, und die Terme der Störgrößen in $\underline{\tau}$ werden vernachlässigt. Zusammenfassend lässt sich formulieren: Die Strömungsgrößen fließen als bekannte, zeitlich konstante jedoch örtlich veränderliche Felder der Größen ρ , \underline{u} und p in die Störungsgleichungen ein. Angelehnt an ihr zeitliches Verhalten, werden ab hier die Strömungsgrößen als Gleichanteile und Störungsgrößen als Schwankungsanteile bezeichnet. Das Rechnen mit Abweichungen von einem bestimmten Zustand wird in der Mathematik als Störungsrechnung bezeichnet. Die Zerlegung hat die Form

Die Schreibweise mit der materiellen Ableitung wird problematisch, da \underline{u} sowohl einen Gleichanteil als auch einen Schwankungsanteil beinhaltet. Die materielle Ableitung wird daher nur als materielle Ableitung mit dem Gleichanteil der Geschwindigkeit definiert.

$$\frac{D(\cdot)}{D t} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \bar{\underline{u}} \cdot \nabla(\cdot) \quad (60)$$

8.3.1 Linearisierung der Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung (56) wird damit wie folgt aufgespalten, wobei der fehlende Term der materiellen Ableitung berücksichtigt wird:

$$\begin{aligned} & \frac{D \bar{\varrho} + \varrho'}{D t} + \underline{u}' \cdot \nabla (\bar{\varrho} + \varrho') + (\bar{\varrho} + \varrho') \nabla \cdot (\bar{\underline{u}} + \underline{u}') \\ = & \underbrace{\frac{D \bar{\varrho}}{D t} + \bar{\varrho} \nabla \cdot \bar{\underline{u}}}_{=0 \text{ (Kontinuität)}} + \frac{D \varrho'}{D t} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{\varrho} + \bar{\varrho} \nabla \cdot \underline{u}' + \varrho' \nabla \cdot \bar{\underline{u}} + \underbrace{\underline{u}' \cdot \nabla \varrho' + \varrho' \nabla \cdot \underline{u}'}_{\approx 0 \text{ (2. Ordnung)}} = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

8.3.2 Linearisierung der Impulsgleichungen

Die Impulsgleichungen (57) werden mit $\tau' \approx 0$ und $\bar{\tau} = \tau$ vereinfacht.

$$\frac{D(\bar{U} + \underline{u}')}{Dt} + \underline{u}' \cdot \nabla(\bar{U} + \underline{u}') + \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \nabla(\bar{p} + p') = \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \nabla \cdot \tau \quad (62)$$

Das Ergebnis ist eine reibungsfreie Formulierung der Impulsgleichungen, die auch als linearisierte Eulergleichung bezeichnet wird (z. B. [7, 12, 28]).

$$\underbrace{\bar{\rho} \frac{D\bar{U}}{Dt} + \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \tau + \bar{\rho} \frac{D\underline{u}'}{Dt} + \rho' \frac{D\bar{U}}{Dt} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{U} + \nabla p'}_{=0 \text{ (Impuls)}} + \underbrace{\rho' \frac{D\underline{u}'}{Dt} + \rho' \frac{D\underline{u}'}{Dt} + \underline{u}' \cdot \nabla \underline{u}' + \nabla p'}_{\approx 0 \text{ (2. Ordnung)}} \approx 0 \quad (63)$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung der Stationarität der Grundströmung ($\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0$) die Impulsgleichung für die Störgrößen:

$$\frac{D\underline{u}'}{Dt} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \bar{U} \cdot \nabla \bar{U} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{U} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' = 0 \quad (64)$$

Die Linearisierung der aus der Energiegleichung entstandenen Beziehung kann auf zweierlei Art geschehen. Einerseits kann die Bilanzgleichung für die Entropie (43) linearisiert werden, wobei die linearisierte Entropie durch eine Reihenentwicklung von Druck und Dichte ersetzt wird. Andererseits kann die Differentialgleichung für den Druck (58) für kleine Störungen linearisiert werden. Da der Fehler bei der Linearisierung von zweiter Ordnung in den Störgrößen ist, muss der Unterschied der auf verschiedenen Linearisierungen ebenfalls von zweiter Ordnung sein.

8.3.3 Linearisierung der Druckschwankung

Die Linearisierung von Gl. (58) erfolgt direkt durch Einsetzen und Vernachlässigen der rechten Seite bei der Störungsausbreitung. Die dissipativen Anteile werden bei der Linearisierung der Impulserhaltung diskutierte. Aus dem dissipativen Term in der Energiegleichung ergibt sich zusätzlich noch ein Produkt aus der doppelten Überschiebung vom Spannungstensor mit dem Gradienten der Geschwindigkeitsschwankung. Dieses Produkt wird als klein angenommen, da die sowohl dissipativen Anteile der mittleren Energiegleichung als auch die Schwankungsgeschwindigkeit klein sind. Die relativ langsam wirkende Wärmeleitung ist vernachlässigbar, sofern die Vorgänge ausreichend schnell ablaufen. Bei Schallwellen, die sich im mit der Strömung bewegten Bezugssystem mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten, ist diese Bedingung erfüllt. Ein anderes Bild ergibt sich bei Entropiewellen und Wirbeln, die mit Strömungsgeschwindigkeit konvektiert werden. Daher wird mit dieser Annahme die Strömungsgeschwindigkeit für die Ausbreitung von Entropiewellen und Wirbeln nach unten beschränkt.

$$\underbrace{\frac{D\bar{p}}{Dt} + \gamma \bar{P} \nabla \cdot \bar{U}}_{\text{Grundströmung}} + \frac{Dp'}{Dt} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{P} + \gamma \bar{p} \nabla \cdot \underline{u}' + \gamma p' \nabla \cdot \bar{U} = \underbrace{-\nabla \cdot \underline{q} + \tau : \nabla \bar{U}}_{\text{Grundströmung}} \quad (65)$$

Nach Abspaltung der Grundströmung ergibt sich also:

$$\frac{D p'}{D t} + \underline{u}' \cdot \underline{\nabla} \bar{P} + \gamma \bar{p} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}' + \gamma p' \underline{\nabla} \cdot \bar{\underline{U}} = 0 \quad (66)$$

Die Gleichung (66) entspricht nahezu einer Massenbilanz in der ρ vollständig durch p ersetzt und die Ableitungen der Geschwindigkeit mit dem Adiabatenexponenten multipliziert wurden.

8.3.4 Linearisierung der Entropieschwankung

Die zweite Möglichkeit, wie sie in Rienstra and Hirschberg [22] herangezogen wurde, ist eine Linearisierung der Entropie selbst. Die Differentialgleichung für die Entropie wird zunächst linearisiert. Dann wird ein Ansatz für die Schwankung der Entropie und die mittlere Entropie gemacht. Da eine Entdimensionalisierung nicht notwendig ist und auf eine zusätzliche Einheitsgröße definiert werden müsste, wird die Ableitung für die physikalischen Größen ausgeführt und erst am Ende eine dimensionslose Form gewählt.

Die Entropiegleichung (43) wird unter der Annahme, dass die viskosen Terme und die Wärmeleitung vernachlässigbare Schwankungen zeigen, in der gleichen Weise aufgespalten. Die Wärmeflüsse ($\tilde{q} \approx \bar{q}$) und viskosen Spannungen ($\tilde{\tau} \approx \bar{\tau}$) der Grundströmung werden den momentanen Werten gleichgesetzt, wie es im vorhergehenden Abschnitt bei der Linearisierung der Druckgleichung geschehen ist. Ausgangspunkt ist Gl. (43), die in physikalischen Größen notiert wird:

$$\rho T \left(\frac{\tilde{D} \tilde{s}'}{\tilde{D} \tilde{t}} + \tilde{u}' \cdot \tilde{\nabla} \tilde{S} + \underbrace{\tilde{\underline{U}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{S}}_{\text{Grundströmung}} + \underbrace{\tilde{u}' \cdot \tilde{\nabla} \tilde{s}'}_{\text{Höhere Ordnung}} \right) = \underbrace{-\tilde{\nabla} \cdot \tilde{q} + \tilde{\tau} : \tilde{\nabla} \tilde{u}}_{\text{Grundströmung}} \quad (67)$$

Das führt auf die folgende Gleichung für die Erhaltung der Entropie:

$$\frac{D \tilde{s}'}{D t} + \tilde{u}' \cdot \underline{\nabla} \tilde{S} = 0 \quad (68)$$

Eine Änderung der Entropie der Grundströmung führt zu einer Störung der Entropie proportional zur Schwankung der Geschwindigkeit. Gl. (50), welche Druck und Dichte im idealen Gas mit der Entropie verknüpft, wird in eine Taylor-Reihe entwickelt, wobei die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden.

$$\tilde{s} \approx C_v \ln \tilde{p} - C_p \ln \tilde{q} + C_v \frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}} - C_p \frac{\tilde{q}'}{\tilde{q}} \quad (69)$$

$$\tilde{S} = C_v \ln \tilde{p} - C_p \ln \tilde{q} \quad (70)$$

$$\tilde{s}' = C_v \frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}} - C_p \frac{\tilde{q}'}{\tilde{q}} \quad (71)$$

Das Ergebnis wird in Gl. (68) eingesetzt und die Kontinuitätsgleichung (32) in dimensionsbehafteter Form abgezogen.

$$\begin{aligned} & \frac{C_v}{\tilde{p}} \frac{D \tilde{p}'}{D \tilde{t}} - \frac{C_p}{\tilde{q}} \frac{D \tilde{q}'}{D \tilde{t}} \\ & - \frac{C_v}{\tilde{p}^2} \tilde{p}' \tilde{\underline{U}} \cdot \underline{\nabla} \tilde{P} + \frac{C_p}{\tilde{q}^2} \tilde{q}' \tilde{\underline{U}} \cdot \underline{\nabla} \tilde{q} + \frac{C_v}{\tilde{p}} \tilde{u}' \cdot \underline{\nabla} \tilde{P} - \frac{C_p}{\tilde{q}} \tilde{u}' \cdot \underline{\nabla} \tilde{q} = 0 \end{aligned} \quad (72)$$

Diese Gleichung wird mit dem Adiabatenexponenten γ weiter umgeformt.

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{p}'}{D\tilde{t}} - \gamma \frac{\tilde{P}}{\tilde{\varrho}} \underbrace{\left(\frac{D\tilde{\varrho}'}{D\tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}}' \cdot \nabla \tilde{\varrho} + \tilde{\varrho} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}' \right)}_{\text{Kontinuität}} + \gamma \frac{\tilde{P}}{\tilde{\varrho}} \tilde{\varrho} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}' \\ - \frac{1}{\tilde{\varrho}} \tilde{p}' \tilde{\mathbf{U}} \cdot \nabla \tilde{P} + \gamma \frac{\tilde{P}}{\tilde{\varrho}^2} \tilde{\varrho}' \tilde{\mathbf{U}} \cdot \nabla \tilde{\varrho} + \tilde{\mathbf{u}}' \cdot \nabla \tilde{P} = 0 \end{aligned} \quad (73)$$

In die dimensionslose Form umgeschrieben ergibt sich eine Gleichung für die Druckstörung:

$$\begin{aligned} \frac{Dp'}{Dt} + \gamma \bar{P} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \left(\mathbf{u}' - \frac{p'}{\bar{P}} \bar{\mathbf{U}} \right) \cdot \nabla \bar{P} \\ + \gamma \frac{\bar{P}}{\bar{\varrho}} \left(\frac{\varrho'}{\bar{\varrho}} \underbrace{\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla \bar{\varrho}}_{=-\bar{\varrho} \nabla \cdot \bar{\mathbf{U}}} + \varrho' \nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (74)$$

Diese Gleichung entspricht genau wie Gl. (66) einer modifizierten linearisierten Massenbilanz, in der die Dichte durch den Druck ersetzt ist. Die Gln. (66) und (74) unterscheiden sich in einem Term der Ableitung der Grundströmung. Der Unterschied ist plausibel, da bei der Linearisierung der Entropie andere Annahmen gemacht wurden, als bei der Linearisierung des Drucks. Gl. (74) entspricht der Formulierung in [22]. Bei konstanter Grundströmung liefern beide Gleichungen das gleiche Ergebnis. Die Linearisierung der Entropie liefert einen Term mit dem Druckgradienten der Grundströmung, während die Linearisierung des Drucks einen Term mit der Geschwindigkeitsdivergenz liefert. Das Ergebnis der beiden Linearisierungen ist bei Vorliegen einer isentropen Grundströmung, wie mit Hilfe der Massenbilanz (32) gezeigt wird, gleich.

$$-\frac{p'}{\bar{P}} \bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla \bar{P} = -\frac{p'}{\bar{P}} \bar{\mathbf{U}} \cdot \gamma \frac{\bar{P}}{\bar{\varrho}} \nabla \bar{\varrho} = \gamma p' \nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} \quad (75)$$

Im Fall einer nicht isentropen Grundströmung sind jedoch Unterschiede von höherer Ordnung zu erwarten. Zum zukünftigen Vergleich beider Theorien wurden beide Varianten der Linearisierung implementiert.

8.3.5 Zusammenfassung der linearisierten Grundgleichungen

Bisher wurden die linearisierten Euler-Gleichungen in dimensionsloser Form abgeleitet und eine Spezialisierung der Ableitungen für Zylinderkoordinaten vorgenommen. Die Grundströmung unterliegt, wie gezeigt wurde, nahezu keinen Einschränkungen. Die einzige wichtige Einschränkung ist bisher, dass die Grundströmung zeitlich konstant, also stationär sein muss. Zur späteren Umsetzung wird angenommen, dass die Grundströmung gegeben ist. Die mittlere Strömung kann beispielsweise durch eine stationäre Strömungssimulation der Euler-Gleichungen, oder eine RANS-Simulation gewonnen werden. Die linearisierten Störungen des mittleren Strömungszustands sind bereits unter der Annahme, dass sowohl die Wärmeleitung, als auch die dissipativen Anteile vernachlässigbare Beiträge liefern, vereinfacht. Das entstehende Gleichungssystem für die Ausbreitung kleiner Störungen im konvektiven Medium ist zusammengefasst:

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{D\varrho'}{Dt} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\varrho} + \bar{\varrho} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \varrho' \nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} = 0 \quad (76)$$

Impulsgleichungen

$$\frac{D \underline{u}'}{Dt} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \bar{\underline{U}} \cdot \nabla \bar{\underline{U}} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{\underline{U}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' = 0 \quad (77)$$

Druckgleichungen

$$\frac{D p'}{Dt} + \gamma \bar{P} \nabla \cdot \underline{u}' + \left(\underline{u}' - \frac{p'}{\bar{P}} \bar{\underline{U}} \right) \cdot \nabla \bar{P} = 0 \quad (78)$$

bzw.

$$\frac{D p'}{Dt} + \gamma \bar{P} \nabla \cdot \underline{u}' + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{P} + \gamma p' \nabla \cdot \bar{\underline{U}} = 0 \quad (79)$$

Die Druckgleichungen unterscheiden sich aufgrund der unterschiedlichen Linearisierung im letzten Term. Im Fall einer homentropen Grundströmung lassen sich die beiden Terme ineinander überführen, so dass sich kein Unterschied ergibt. In einer nicht isentropen Grundströmung liefern beide Arten der Linearisierung unterschiedliche Ergebnisse.

In der Literatur werden meist die linearisierten Eulergleichungen in isentroper Form verwendet. In den wenigen Veröffentlichungen (z. B. [7, 28]), die sich mit nicht isentropen Strömungen beschäftigen, sind meistens Vereinfachungen getroffen worden, so dass der entscheidende Term nicht mehr auftaucht. Es muss daher auch untersucht werden, wie groß die Unterschiede zwischen den beiden Formulierungen sind.

9 Lösungen der linearisierten Euler-Gleichungen

10 Konzepte für die Schallquelle (APE)

11 Axialsymmetrische Probleme

11.1 Zusammenstellung der Ableitungen für krummlinige Koordinaten: Zylinderkoordinaten

In Abbildung 6 ist die Richtung der neuen Koordinaten veranschaulicht. Die x -Richtung bleibt unverändert, r ist die radiale und ϕ die azimutale Koordinate. In diesem Abschnitt werden die

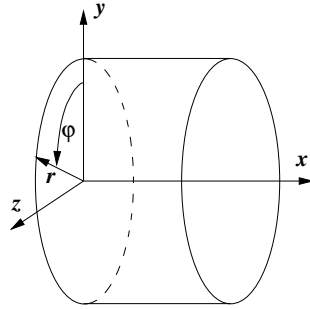


Abbildung 6: Anordnung der Zylinderkoordinaten

Gleichungen für ein um die x -Achse mitrotierendes Koordinatensystem spezifiziert. Die Lage eines Punktes im Raum sei durch das Koordinaten-Tripel (x, r, ϕ) in Zylinderkoordinaten eindeutig bestimmt. Das mitbewegte Koordinatensystem führt dazu, dass die Ableitungen der Einheitsvektoren nicht verschwinden. Es gilt:

$$\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \phi} = \underline{e}_\phi \quad (80)$$

$$\frac{\partial \underline{e}_\phi}{\partial \phi} = -\underline{e}_r \quad (81)$$

Für $r \rightarrow 0$ wird dieses Koordinatensystem singulär, was bei der späteren Umsetzung noch beachtet werden muss. Die Divergenz eines Skalars in Zylinderkoordinaten entspricht der in kartesischen Koordinaten:

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{p} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\phi}} \quad (82)$$

Die Divergenz eines Vektors in Zylinderkoordinaten ist unter Beachtung der Koordinatenableitungen wie folgt gegeben (vgl. [24]):

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r} \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\phi}} \quad (83)$$

Der Gradient eines Skalars in Zylinderkoordinaten entspricht dem in kartesischen Koordinaten:

$$\tilde{\nabla} \tilde{p} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \underline{e}_x + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} \underline{e}_r + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\phi}} \underline{e}_\phi \quad (84)$$

Der Gradient eines Vektors in Zylinderkoordinaten ergibt unter Beachtung der Koordinatenableitungen den folgenden Tensor zweiter Stufe (vgl. [24]):

$$\tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}} & \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}} & \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\varphi}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \end{pmatrix}_{\underline{e}_i \underline{e}_j} \quad (85)$$

Die Rotation des Vektors $\tilde{\underline{u}}$ berechnet sich in Zylinderkoordinaten wie folgt:

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\underline{u}} = \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r} \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}}, \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right)^T \quad (86)$$

Kreuzprodukt mit der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \underline{u} \times (\tilde{\nabla} \times \underline{u}) &= \\ & \left\{ \tilde{v} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right] - \tilde{w} \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right], \tilde{w} \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r} \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}} \right] - \tilde{u} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right], \right. \\ & \left. \tilde{u} \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right] - \tilde{v} \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r} \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}} \right] \right\} = \\ & \left\{ \tilde{v} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right] - \tilde{w} \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right], \tilde{w} \left[\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \left(\tilde{w} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}} \right) \right] - \tilde{u} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right], \right. \\ & \left. \tilde{u} \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right] - \tilde{v} \left[\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \left(\tilde{w} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (87)$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \underline{T} &= \left\{ \frac{\partial -\tilde{p}}{\partial \tilde{x}}, \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial -\tilde{r} \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}} - \tilde{p}, \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial -\tilde{p}}{\partial \tilde{\varphi}} \right\} + \lambda \Delta \underline{u} + \eta \tilde{\nabla} \cdot \underline{E} \\ &= \left\{ \frac{\partial -\tilde{p}}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial -\tilde{p}}{\partial \tilde{r}}, \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial -\tilde{p}}{\partial \tilde{\varphi}} \right\} + \lambda \Delta \underline{u} + \eta \tilde{\nabla} \cdot \underline{E} \end{aligned} \quad (88)$$

Die zweite Vektorform wird benutzt, um die Rotation und damit die Wirbel abzuspalten.

$$\tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} = -\tilde{\underline{u}} \times (\tilde{\nabla} \times \tilde{\underline{u}}) + \tilde{\nabla} \frac{\tilde{u}^2}{2} \quad (89)$$

Der Laplace Operator des Vektors $\tilde{\underline{u}}$ ist in Zylinderkoordinaten folgendermaßen definiert:

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} = \left(\Delta \tilde{u}, \Delta \tilde{v} - \frac{1}{\tilde{r}^2} [\tilde{v} + 2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\varphi}}], \Delta \tilde{w} - \frac{1}{\tilde{r}^2} [\tilde{w} - 2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}}] \right)^T \quad (90)$$

Die speziellen Ableitungen in Zylinderkoordinaten werden erst später benötigt, wenn das Modell von der symbolischen Schreibweise in die im Programm verwendete Index-Schreibweise umgewandelt wird. Die symbolische Schreibweise wird für die Ableitungen wegen der Kürze bevorzugt.

11.2 Reduzierung des Rechenaufwands infolge der Axialsymmetrie

Der in diesem Abschnitt vorgestellte Ansatz hat das Ziel, den Rechenaufwand bei der Berechnung dreidimensionaler, axialsymmetrischer Geometrien zu vermindern. Dafür wird die Periodizität der Störungen in Umfangsrichtung ausgenutzt. Das Ergebnis ist eine Reduktion des Problems auf zwei Dimensionen für jede untersuchte Umfangsmoden. Die Eigenschaft der Axialsymmetrie wird neben

der Geometrie selbst, auch von den Ruhegrößen gefordert. Wie sich später zeigt, ist diese Forderung keine starke Einschränkung. Im Folgenden wird der modale Ansatz vorgestellt.

Wie schon erwähnt, wird die Grundströmung als axialsymmetrisch angenommen. Das bedeutet, dass alle Strömungskomponenten von Null verschieden sein können, sich jedoch mit dem Winkel φ nicht ändern. Alle Ableitungen der Ruhegrößen sind in Umfangsrichtung Null. Eine axialsymmetrische Rechnung ermöglicht auch die Berücksichtigung verdrahter Strömungen. Es stellt sich die Frage, wie die Störungskomponenten in Umfangsrichtung ohne die Vernetzung des Rechengebiets in diese Richtung berechnet werden können. Diese Frage kann durch geometrische Überlegungen beantwortet werden. Rollt man die konzentrischen Ringe für ein konstantes x und r , in Abb. 7 (oben) zweidimensional dargestellt, auf einer Linie ab, so ergibt sich zwangsweise eine periodische Funktion mit der Periodenlänge $2\pi r$, dem Kreisumfang also. Diese periodische Funktion kann mittels Fourier-Reihenzerlegung in ihre harmonischen Anteile zerlegt werden. Dieser Vorgang ist vereinfacht in Abb. 7 veranschaulicht. Die harmonischen Anteile auf dem Umfang werden Umfangsmoden genannt. In dem Beispiel aus Abb. 7 besteht das ursprüngliche Signal aus zwei Kosinus-

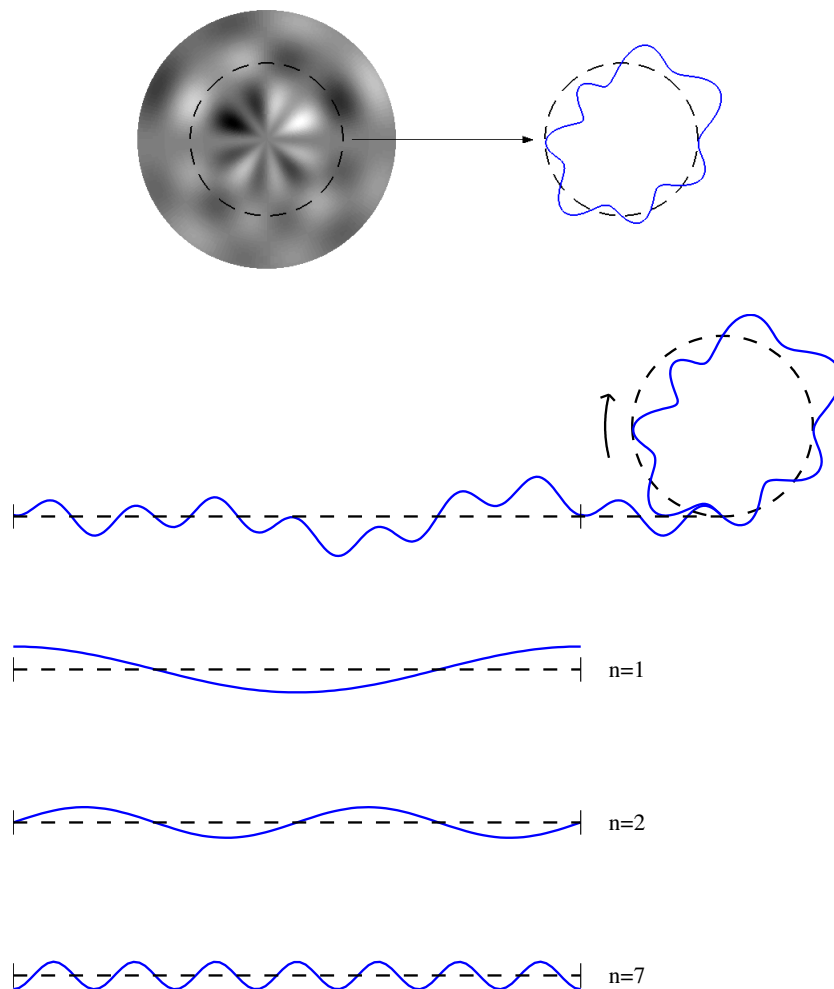


Abbildung 7: Veranschaulichung der modalen Zerlegung in Umfangsrichtung

Anteilen und einem Sinus-Anteil unterschiedlicher Frequenzen und Vorzeichen. In den meisten praktischen Fällen ist es ausreichend, einige wenige der spektralen Anteile zu berücksichtigen, um das Orginalsignal anzunähern. Die beschriebene Zerlegung lässt sich mathematisch formulieren

als

$$\Theta(x, r, \phi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_m e^{-im\varphi} \quad (91)$$

wobei φ die zerlegte physikalische Größe und m die Mode darstellt. Das Ergebnis von (91) ist komplex und lässt sich als Amplitude $|\Theta_m|$ und Phase $\arg(\Theta_m)$ interpretieren. Durch Änderung der Phase wird der Verlauf einer physikalischen Größe in Umfangsrichtung „gedreht“. Ebene Wellen sind in axialsymmetrischen Geometrien in φ -Richtung konstant und bestehen aus der nullten Umfangs-mode, es gilt $m = 0$.

Das Minus bedeutet, dass für positive m die Moden in positiver φ -Richtung laufen, wenn die Zeit der $e^{+i\omega t}$ Konvention folgt. $\theta^m = \theta_{\Re,m} + i\theta_{\Im,m}$ ist die komplexe Amplitude der jeweiligen Größe, die sowohl die Amplitude, als auch die Phaseninformation beinhaltet. Die eigentliche Lösung der Gleichungen ist der Realteil von $\theta_m e^{-im\varphi}$. Die Grundströmung wird als konstant in der Winkelkoordinate φ angenommen, so dass die Ableitungen nach dem Winkel verschwinden.

$$\theta(r, \varphi, z, t) = \sum_{m=0}^M [\theta_{\Re,m}(r, z, t) \cos(m\varphi) + \theta_{\Im,m}(r, z, t) \sin(m\varphi)] \quad (92)$$

Die Größen ρ , \underline{u} und p werden komplex berechnet. *Besonderheit:* Die nichtlineare Theorie koppelt formal im Gegensatz zur linearen Näherung den realen und imaginären Anteil. Formal ist das korrekt, aber im Modell fehlen bei höheren Moden die Harmonischen in Umfangsrichtung, die von der Nichtlinearität erzeugt werden. Der Ansatz ist daher nur für die nullte Mode exakt stellt für höhere Moden eine lineare Näherung dar. Die nichtlineare Behandlung ist bei der Untersuchung nur einer Frequenz nicht möglich. Eine Vervollständigung des Modells könnte z. B. auf der Methode der sukzessiven Approximationen [9], [5] basieren. Durch das fehlen des Superpositionsprinzips bei nichtlinearer Rechnung können Ergebnisse für die einzelnen Moden nicht einfach wie im linearen Fall addiert werden.

Die Vorschrift für die Rückgewinnung physikalischer Werte für die reale, dreidimensionale Geometrie aus dem Komplexen lautet im linearen Fall:

$$\underline{q}(r, \varphi, z, t) = \sum_{m=0}^M \left(\underline{q}_{\Re,m}(r, z, t) \cos(m\varphi) + \underline{q}_{\Im,m} \sin(m\varphi) \right) \quad (93)$$

Die Größen $\underline{q}_{\Re,m}$ und $\underline{q}_{\Im,m}$ werden vom Rechencode direkt berechnet.

Für den tonalen Anteil des Schalls ist dadurch eine starke Verringerung des numerischen Aufwands erreicht worden. Der Nabla-Operator für die Schwankungsgrößen wird also durch eine zweidimensionale räumliche Ableitung und einen der Ableitung in φ entsprechenden Zusatzterm ersetzt. Bei den mittleren Strömungsgrößen verschwindet der Zusatzterm. Bei den Schwankungsgrößen wird die φ -Ableitung durch $-im$ ersetzt. Der Nabla-Operator für die Schwankungsgrößen wird wie folgt identifiziert:

$$\nabla(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} - \frac{im}{r}(\cdot) =: \nabla_{x,r}(\cdot) - \frac{im}{r}(\cdot) \quad (94)$$

Spätestens hier wird der Übergang auf die Index-Schreibweise sinnvoll. Die Ableitungen der Einheitsvektoren des mitrotierenden Koordinatensystems (x, r, φ) im Inertialsystem müssen wie im Abschnitt 11.1 dargelegt, beachtet werden, obwohl keine explizite Ableitung nach φ mehr in der neuen Definition vorhanden ist. Das Einsetzen der Definitionsgleichungen für die symbolische

Schreibweise liefert die vollständigen Gleichungen, wie sie in der Computational-Aeroacoustic (CAA)-Methode, die im nächsten Kapitel ?? vorgestellt wird, verwendet werden. Die vollständig ausgedruckten Gleichungen sind dem Abschnitt ?? zu entnehmen. Durch Ordnen der Ableitungen nach den unabhängigen Variablen folgt die im Programm umgesetzte Matrix-Vektor-Form der Grundgleichungen im Abschnitt 11.4.1. Durch die Abspaltung der Wirbelstärke aus den linearisierten Eulergleichungen wird ein Ausschluss von instabilen physikalischen Lösungen erreicht [6]. Bei der Verwendung der Acoustic-Perturbation-Equations (APE)-Gleichungen wird nur die Rotation der Störungen Null gesetzt, während die Grundströmung nicht verschwindet. Die rotationsfreien Grundgleichungen werden entsprechend Ewert and Schröder [6] notiert:

$$(\bar{U} \cdot \nabla) \underline{u}' + (\underline{u} \cdot \nabla) \bar{U} = \nabla (\bar{U} \cdot \underline{u}') + \underline{u}' \times (\nabla \times \bar{U}) \quad (95)$$

Die abgespaltenen Terme werden in [6] als Quellterme betrachtet und aus einer numerischen Simulation der vollen Navier-Stokes-Gleichungen im Quellgebiet gewonnen.

Die mit der zweiten Vektorform unter Vernachlässigung der Rotation der Störungsgeschwindigkeit gewonnene Formulierung der Grundgleichungen ist dem Abschnitt 11.4.2 zu entnehmen. Die abgespaltene Wirbelstärke-Störung wird, im Gegensatz zu der Quellformulierung [6], hier Null gesetzt. Die rotationsfreie Formulierung der Grundgleichungen spaltet auf diese Art die Ausbreitung von instabilen Scherschichten vollständig ab.

Durch die verschiedenen Formulierungen ergibt sich eine Reihe von möglichen Gleichungen zur Modellierung von verschiedenen Problemen. Weiterhin besteht die Möglichkeit die Entropie der Grundströmung als homogen anzunehmen. Die Störungsausbreitung wird damit isentrop in einer homentropen Grundströmung modelliert. Homentropie der Grundströmung bedeutet, das gesamte Strömungsfeld ist isentrop. Die Annahme schließt die Modellierung von Entropiewellen aus, wurde aber zu Vergleichszwecken und für die Rückwärtskompatibilität im Programm belassen. Im Abschnitt 11.4.3 sind die vereinfachten, für Real- und Imaginärteil vollständig entkoppelbaren, Gleichungen im Falle fehlenden Dralles und konstanter Entropie wiedergegeben.

11.3 Randbedingung an der Achse

Die Achse stellt eine Berandung des Rechengebiets dar, an der physikalische Randbedingungen angegeben werden können. Dabei handelt es sich um Symmetrie- bzw. Antimetriebedingungen die ausschließlich von der Nummer der Azimutalmode m abhängen. Zur Einbringung der axialen Randbedingung werden drei Gitterlinien unterhalb der Achse hinzugefügt. Dadurch kann zur Berechnung der Ableitungen auf und oberhalb der Achse ein symmetrischer Differenzenstern verwendet werden, der der Symmetrie oder Antimetrie an der Achse insbesondere gerecht wird. Für die Implementierung der axialen Randbedingung wird davon ausgegangen, dass die Randpunkte außerhalb des inneren Rechengebiets an der Achse gespiegelte Bildpunkte der drei Gitterlinien oberhalb der Achse sind.

Die Randbedingung an der Symmetrieachse ergibt sich aus dem Ansatz (??), wenn die Winkelkoordinate $\varphi = \pi$ gesetzt wird. Dabei ist zu beachten, dass die Geschwindigkeitskomponenten unterhalb der Achse dadurch in einem um 180° um die x -Achse gedrehten Koordinatensystem notiert werden. Die j -Koordinate des Rechengitters bezieht sich auf die über der Achse verwendete Orientierung. Dadurch ergibt sich ein Orientierungswechsel zwischen der natürlichen Basis $(\underline{\eta}, \underline{\xi})$ des Rechengitters und der Basis der Zylinderkoordinaten $(\underline{e}_x, \underline{e}_r, \underline{e}_\varphi)$. Die Verhältnisse sind in Abbildung 8 dargestellt, wobei die \underline{e}_φ -Richtung jeweils ein Rechtssystem mit den beiden anderen Vektoren bildet. Das ist die Ursache dafür, dass r unterhalb der Achse negativ eingegeben wird. Die radiale und azimutale Geschwindigkeit sind durch den Orientierungswechsel ebenfalls mit einem

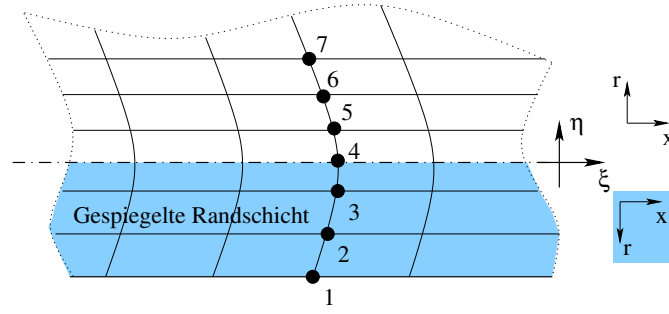


Abbildung 8: Schematische Darstellung des Orientierungswechsels an der Achse

Vorzeichenwechsel behaftet. Insgesamt ergeben sich folgende Gleichungen für die axiale Randbedingung, wenn $j = 4$ auf der Achse gilt:

$$\left. \begin{aligned} \varrho'_j &= (-1)^m \varrho'_{8-j} \\ u'_j &= (-1)^m u'_{8-j} \\ v'_j &= -(-1)^m v'_{8-j} \\ w'_j &= -(-1)^m w'_{8-j} \\ p'_j &= (-1)^m p'_{8-j} \end{aligned} \right\} \text{ mit } j = 1, \dots, 3 \quad (96)$$

Die Achse ($r = 0$) stellt eine Singularität der verwendeten Zylinderkoordinaten dar. Die radiale Koordinate r verschwindet und damit wird die Ableitung in azimuthaler Richtung $\frac{1}{r} \frac{\partial \cdot}{\partial \varphi}$ singulär. Diese singuläre Linie erfordert somit eine Sonderbehandlung. Die kann wahlweise in Form einer Interpolation oder mit Hilfe der Definition des Differenzenquotienten (L'Hospital) umgesetzt werden. Da die radiale Koordinate bei kleiner Gitterweite auch schon vor Erreichen von $r = 0$ zu starken Fehlern und damit Instabilitäten führen kann, ist im Programm eine Variable ε vorgesehen, die die Sonderbehandlung für kleine Radien einschaltet.

Die Singularitätsbehandlung, wie sie bisher im CAA-Programm angewendet wurde, bezieht sich ausschließlich auf die Ableitung in φ . Unter der Annahme, dass die Werte an der Achse verschwinden, werden die aus der azimuthalen Ableitung hervorgehenden, mit $\frac{1}{r}$ multiplizierten Terme ersetzt [16]. Dazu wird die Definition des Differenzenquotienten benutzt:

$$\frac{dp'}{dr} := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{p'(r) - p'(0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{p'(r)}{r} \quad (97)$$

Dieses Vorgehen liefert falsche Ergebnisse, wenn der Wert auf der Achse nicht exakt Null ist, daher ist vor jedem Zeitschritt eine Interpolation notwendig. Die Näherung versagt vollständig, wenn ein Punkt außerhalb der Achse damit berechnet wird, da hier weder r noch der Wert der Störgröße verschwindet. Außerdem gehen für die $m = 0$ Mode und die $m = 1$ Mode einige Terme nur gemeinsam gegen Null, so dass zwischenzeitlich unendliche Werte vorliegen können [16].

Im vorliegenden Programm wurde daher eine Interpolationsroutine eingeführt, die unter Berücksichtigung der physikalischen Eigenschaften der jeweiligen Mode einen Wert auf der Achse und gegebenenfalls auch nahe der Achse bestimmen kann. Es wird dazu angenommen, dass Druck, Dichte und die axiale Geschwindigkeit sich an der Achse wie die Bessel-Funktionen m -ter Ordnung verhalten. Die radiale und azimuthale Geschwindigkeit verhalten sich wie Bessel-Funktionen $(m - 1)$ -ter Ordnung. Mit der Näherung $J_m(r) \sim r^m$ aus Rienstra and Hirschberg [22] für das Verhalten von Bessel-Funktionen bei $r \rightarrow 0$ kann der Wert auf der Achse berechnet werden.

$$p'(r_1) \approx \frac{p(r_0)}{r_0^m} r_1^m \quad (98)$$

Die Gleichung (98) gilt exakt für $r_1 = 0$. Wenn der zu interpolierende Punkt nicht auf der Achse liegt, stellt Gl. (98) eine Näherung dar. Die Näherung (98) ist im Gegensatz zu Gl. (97) auch in der Nähe der Achse zulässig.

11.4 Anhang: Gleichungen zum Abschnitt

Der Anhang beinhaltet die Gleichungen der Schallausbreitung in Zylinderkoordinaten. Die verschiedenen Spezialfälle sind einzeln wiedergegeben. Für $m = 0$ gehen die Gleichungen in die der ebenen Wellenausbreitung ohne Abhängigkeit von φ über.

11.4.1 Vektorielle Schreibweise der vollständigen Modellgleichungen

Die Gleichungen sind in Matrix-Vektor Form ausgeschrieben, so wie sie in das CAA-Programm eingeflossen sind.

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} = -\underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial x} - \underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial r} - \frac{1}{r} \underline{C} \cdot \underline{q} - \underline{D} \cdot \underline{q} \quad (99)$$

Der Vektor \underline{q} für das Feld der Störgrößen ist dabei definiert als:

$$\underline{q} := \left(\varrho', \quad u', \quad v', \quad w', \quad p' \right)^T \quad (100)$$

Die Matrizen, welche die Differentialgleichung wiedergeben, ergeben sich wie folgt aus den Gleichungen des vorherigen Abschnitts, geschrieben in komplexer Form:

Ableitung der Störgrößen nach x :

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{\varrho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{U} & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\varrho}} \\ 0 & 0 & \bar{U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{U} & 0 \\ 0 & \gamma \bar{P} & 0 & 0 & \bar{U} \end{pmatrix} \quad (101)$$

Ableitung der Störgrößen nach r :

$$\underline{B} := \begin{pmatrix} \bar{V} & 0 & \bar{\varrho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{V} & 0 & \frac{1}{\bar{\varrho}} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{V} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \bar{P} & 0 & \bar{V} \end{pmatrix} \quad (102)$$

Ableitung der Störgrößen nach φ :

$$\underline{C} := \begin{pmatrix} \bar{V} - i m \bar{W} & 0 & \bar{\varrho} & -i m \bar{\varrho} & 0 \\ 0 & -i m \bar{W} & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{W}^2 & 0 & -i m \bar{W} & -2 \bar{W} & 0 \\ \frac{\bar{V} \bar{W}}{\bar{\varrho}} & 0 & \bar{W} & \bar{V} - i m \bar{W} & -\frac{i m}{\bar{\varrho}} \\ 0 & 0 & \gamma \bar{P} & -i m \gamma \bar{P} & \gamma \bar{V}_{\text{nur CAA_LIN_PRESS}} - i m \bar{W} \end{pmatrix} \quad (103)$$

Ableitungen der Grundströmung, linearisiert in der Druckstörung:

$$\underline{D} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} & 0 & \gamma [\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r}] \end{pmatrix} \quad (104)$$

Ableitungen der Grundströmung, linearisiert in der Entropiestörung:

$$\underline{D} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} & 0 & -\frac{1}{\bar{P}} [\bar{U} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r}] \end{pmatrix} \quad (105)$$

11.4.2 Vektorielle Schreibweise der rotationsfreien Modellgleichungen

Die rotationsfreien Formulierungen der Grundgleichungen wird mit Hilfe der zweiten Vektorform 89 abgeleitet. Die Grundströmung soll eine nicht verschwindende Rotation haben können. Der Vektor \underline{q} und die Form der Grundgleichungen sind dabei wie im vorhergehenden Abschnitt 11.4.1 definiert. Die Matrizen, welche die Differentialgleichung wiedergeben, ergeben sich aus den Gleichungen des vorherigen Abschnitts, indem die zweite Vektorform in Form von Gl. (95) in die Impulsgleichungen (Zeilen 2 bis 4) eingesetzt und die Rotation der Störungen vernachlässigt wird. Die Matrizen ergeben sich zu:

Ableitung der Störgrößen nach x :

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{U} & \bar{V} & \bar{W} & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \bar{P} & 0 & 0 & \bar{U} \end{pmatrix} \quad (106)$$

Ableitung der Störgrößen nach r :

$$\underline{B} := \begin{pmatrix} \bar{V} & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{U} & \bar{V} & \bar{W} & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \bar{P} & 0 & \bar{V} \end{pmatrix} \quad (107)$$

Ableitung der Störgrößen nach φ :

$$\underline{C} := \begin{pmatrix} \bar{V} - i m \bar{W} & 0 & \bar{\rho} & -i m \bar{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{W}^2}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & -2 \bar{W} & 0 \\ \frac{\bar{V} \bar{W}}{\bar{\rho}} & -i m \bar{U} & \bar{W} - i m \bar{V} & \bar{V} - i m \bar{W} & -\frac{i m}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & \gamma \bar{P} & -i m \gamma \bar{P} & \gamma \bar{V}_{\text{nur CAA_LIN_PRESS}} - i m \bar{W} \end{pmatrix} \quad (108)$$

Die Ableitungen der Grundströmung behalten die im Abschnitt 11.4.1 gegebene Form, da die Rotation der Grundströmung im Allgemeinen nicht verschwindet.

11.4.3 Vereinfachung für drallfreie isentrope Strömung

Die Differentialgleichungen für Real- und Imaginärteil lassen sich entkoppeln, wenn die Grundströmung drallfrei angenommen wird. Das Ergebnis ist hier in vollständig ausgeschriebener Form wiedergegeben. Im Gegensatz zu 11.4.1 wird hier außerdem Homotropie gefordert, d.h. Grundströmung und Störungsausbreitung verlaufen isentrop, womit die Entropie der Strömung eine globale Konstante wird. Die drallfreie Variante der Grundgleichungen ist im Programm durch die Wahl $\bar{W} = 0$ zugänglich. Ableitung der Störgrößen nach x :

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{U} & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & \bar{U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{U} & 0 \end{pmatrix} \quad (109)$$

Ableitung der Störgrößen nach r :

$$\underline{B} := \begin{pmatrix} \bar{V} & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{V} & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{V} & 0 \end{pmatrix} \quad (110)$$

Ableitung der Störgrößen nach φ :

$$\underline{C} := \begin{pmatrix} \bar{V} & 0 & \bar{\rho} & -im\bar{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{V} & -\frac{im}{\bar{\rho}} \end{pmatrix} \quad (111)$$

Ableitungen der Grundströmung:

$$\underline{D} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (112)$$

Druck-Dichte Beziehung:

$$p'_m = \gamma \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \rho'_m \quad (113)$$

12 Komplexe Wandimpedanzen

Grundsätzliches Problem:

- Messung der Impedanz ohne Strömung
- Nutzung der Impedanz in überströmten Oberflächen
- Praktisch andere wirksame Impedanz führt häufig zu Auslegungsfehlern
- Modelle

12.1 Modelle für die Wandimpedanz Frequenzbereich

13 Nicht reflektierende Abstrahl- und Ausflussbedingung

Bei der numerischen Simulation kann immer nur ein Ausschnitt der Natur modelliert werden. Bei Rohrströmungen sind es beispielsweise die Enden eines unendlich fortgesetzten Rohres, die korrekt modelliert werden müssen, um die korrekte Lösung im Rohr zu erhalten. Daher ist es notwendig Randbedingungen anzugeben, die einen Abschluss des Rechengebiets am offenen Ende eines gedachten unendliche langen Rohrs schaffen. An diesem Abschluss setzt sich das Strömungsfeld, als auch das Störungsfeld ins Unendliche fort, und es treten keine Reflexionen auf. Dabei wird angenommen, dass sich keine Schallquellen außerhalb dieses Randes befinden. Da die Differentialgleichungen eine Ausbreitung von Störungen ins Rechengebiet ermöglichen, müssen die Ränder reflexionsfrei bzw. möglichst reflektionsarm gemacht werden.

In diesem Abschnitt wird das im CAA-Code bereits implementierte und verwendete Verfahren einer Pufferzone, in der die Differentialgleichungen um einen Dämpfungsterm erweitert werden, vorgestellt. Weiterhin wird eine verbesserte Technik für diese Pufferzone herangezogen. Diese verbesserte Randbedingung wird zur Verringerung von Reflexionen in den CAA-Code implementiert und im folgenden Kapitel validiert und auf ihre Vorteile geprüft.

Die Beiden oben genannten Randbedingungen vereint das Konzept, die Störungen vor Erreichen der Berandung des Rechengebiets auf Null zu bringen. Dabei ist die PML-Randbedingung speziell darauf optimiert möglichst wenige Störungen zu erzeugen, die als unphysikalische Reflexionen die Lösung verschmutzen. Am Ende des Abschnitts wird eine Randbedingung vorgestellt, die die Physik der Lösungen der Eulergleichungen berücksichtigt, um eine nicht reflektierende Randbedingung zu entwerfen. Die Annahmen, die bei der Ableitung getroffen wurden, machen die Randbedingung unbrauchbar, wenn sich keine ebenen Wellen ausbreiten. Die Randbedingung hat sich in früheren Versuchen als instabil bei Langzeitintegration erwiesen und wurde daher durch die Pufferzone ersetzt.

13.1 Die Newton-Cooling/Friction (NC/F)-Randbedingung

Die Pufferzone vom Typ Newton-Cooling/Friction (NC/F) stellt eine sehr stabile und gleichzeitig einfach handhabbare Randbedingung dar. Sie kann sowohl an der Schallquelle, als auch als Ein- bzw. Ausström-Randbedingung verwendet werden. Die Differentialgleichung wird entsprechend Israeli and Orszag [13] um einen Dämpfungsterm erweitert und so eine Näherung für eine nicht reflektierende Randbedingung gewonnen.

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} = -\underline{F}_{phys.}(\underline{q}) - R_d(x, r)(\underline{q} - \underline{q}_0) \quad (114)$$

Der Dämpfungskoeffizient $R_d(x, r)$ ist räumlich Gaußverteilt mit dem Maximum am Rand des Rechengebiets. Dadurch ergibt sich eine räumliche, zum Rand hin stetig zunehmende Verteilung des Dämpfungskoeffizienten. Um nicht das gesamte Rechengebiet zu bedämpfen muss die Gauß-Verteilung ab einem bestimmten Wert im inneren Feld abgebrochen werden. Dieser Schwellenwert wird so gewählt, dass das Produkt aus der Ableitung und der Gitterweite gerade dem Wert von R_d entspricht, um möglichst wenige Gitterschwingungen zu erzeugen, die gewöhnlich an Unstetigkeitsstellen entstehen (Gibbs-Phänomen). Die Anzahl der Gitterpunkte n_P , für die eine geänderte Differentialgleichung angenommen wird, kann vorgegeben werden. Der Abstand d_{BC} wird mit der Breite $\Delta x_{NC/F}$ der Pufferzone ins Verhältnis gesetzt und quadriert, um einen Faktor zur Steuerung der Breite der Gauß-Verteilung zu gewinnen.

$$R_d(x, r) = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{1}{2} n_P \frac{d_{BC}^2}{\Delta x_{NC/F}^2} \right\} & , \quad d_{BC} < \Delta x_{NC/F} \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases} \quad (115)$$

mit

$$\begin{aligned} d_{BC} &= \sqrt{(x - x_o)^2 + (r - r_o)^2} \\ x_{NC/F} &= \sqrt{(x_e - x_o)^2 + (r_e - r_o)^2} \end{aligned} \quad (116)$$

Der Vektor \underline{q}_0 stellt einen vorgegebenen Zustand dar. Dieser Zustand kann zur Eingabe der Schallquelle auf zusätzlichen Gitterlinien genutzt werden. Die Schallquelle wird dadurch als weiche Vorgabe \underline{q}_0 in einer frei wählbaren Zone vor dem Rand eingebracht. Auf diese Weise werden Abweichungen vom vorgegebenen Zustand mit sinkendem Abstand zur Schallquelle graduell verringert. An der Schallquelle herrscht bei geeigneter Einstellung der Dämpfung der vorgegebene Zustand, wodurch Gitterschwingungen und Sprünge vermieden werden.

Die einfache Randbedingung ist besonders an der Schallquelle geeignet. Die mit dieser Randbedingung erzielten Ergebnisse zeigten im Allgemeinen in der Vergangenheit gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung bzw. nur geringe Reflexionen. Da die NC/F-Randbedingung nur die Näherung einer nicht reflektierenden Randbedingung darstellt, wird sie an dem Rand des Rechengebiets an dem der Schall austritt durch eine verbesserte Randbedingung vom ähnlichen Typ ersetzt. Diese so genannte Perfectly-Matched-Layer (PML)-Randbedingung stellt theoretisch eine exakt nicht reflektierende Randbedingung dar. Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse der beiden Randbedingungen anhand numerischer Resultate miteinander verglichen.

13.2 Die Perfectly-Matched-Layer (PML)-Randbedingung

Die Perfectly-Matched-Layer-Randbedingung (PML) geht ursprünglich auf Berenger [3] zurück. Die initial gegebene Randbedingung bezieht sich auf die Maxwell'schen Gleichungen und spaltet diese unphysikalisch auf. Genau wie bei der NC/F-Randbedingung werden zusätzliche dissipative Terme am Rand des Rechengebiets hinzugefügt, wobei als Nebendebingung die Dispersionsrelation nicht verändert werden soll [10]. Entsprechende Formulierungen wurden wenig später auch zur numerischen Berechnung der linearisierten Euler-Gleichungen vorgestellt [10, 11, 28]. Die unphysikalisch aufgespaltene Formulierung der Differentialgleichungen in der PML-Zone wird auch als "Split-PML" bezeichnet.

Die ursprüngliche PML-Randbedingung von Berenger formuliert ein nur schwach korrekt gestelltes Problem. Beim Vorliegen einiger kurzweiliger Störungen kommt es daher zu Instabilitäten. Die generelle Eigenschaft der PML-Randbedingung, Schwankungen unter jedem Einfallswinkel und bei jeder Frequenz nahezu reflexionsfrei dämpfen zu können, ist für technische Anwendungen von

großem Interesse. Daher wurde die Idee weiter verfolgt und die anfänglichen Schwierigkeiten in der elektrodynamischen Simulation beseitigt [10]. Die Split-PML hat den Nachteil, dass sich die Anzahl der Gleichungen in der Pufferzone im zweidimensionalen Fall verdoppelt und die Technik sich nicht ohne weiteres in die bestehenden Gleichungen einfügt.

Die Anwendung der PML auf strömungsakustische Probleme unterscheidet sich vor allem durch die konvektiven Anteile in den Störungsgleichungen von den ursprünglichen elektrodynamischen Problemen. Tam [28] konnte bei der Untersuchung der von Hu [11] vorgestellten Split-PML für die Eulergleichungen eine systematische Instabilität in Anwesenheit einer mittleren Strömung zeigen. Die gezeigte Instabilität resultiert aus den zusätzlichen Eigenwerten der Dispersionsrelation durch die konvektiven Terme. Zur Lösung dieses Problems schlägt Tam [28] eine Erhöhung der künstlichen, selektiven Dämpfung (SAD) des DRP-Schemas vor. Die gegebene Lösung führt in einem Rohr nicht zum gewünschten Resultat, stattdessen kommt es zu einer Verstärkung langwelliger Störungen. Die PML-Randbedingung wird im durchströmten Rohr instabil [28]. Hesthaven [10] schlägt zur Lösung vor, die Grundströmung abklingen zu lassen, was zu einer Änderung der Dispersionsrelation führen muss. Damit ist die Idee der PML-Randbedingung grundlegend verletzt.

Neuere Veröffentlichungen aus der Elektrodynamik verwenden eine PML-Randbedingung, für die die Aufspaltung der Variablen nicht mehr notwendig ist [12]. Stattdessen wird eine Hilfsvariable eingeführt, die nur in der Pufferzone abgespeichert werden muss. Im Folgenden wird entsprechend der Formulierung von Hu [12] eine PML-Randbedingung für zylindrische Koordinaten entwickelt. Den Ausgangspunkt bilden dabei die linearisierten Euler-Gleichungen (76), (77) und (78), die in Matrix-Vektor Form umgeschrieben werden müssen:

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} = -\underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial x} - \underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial r} - \frac{1}{r} \underline{C} \cdot \underline{q} - \underline{D} \cdot \underline{q} \quad (117)$$

Die genaue Form der Matrizen ist dem Anhang 11.4.1, Gleichungen (101–105) zu entnehmen. Der Vektor \underline{q} setzt sich wie folgt aus den Störgrößen zusammen.

$$\underline{q} = \left(\varrho', \quad u', \quad v', \quad w', \quad p' \right) \quad (118)$$

Bei der Ableitung der PML-Randbedingung werden zunächst alle Größen in solche Anteile, die mit x variieren und solche, die mit r variieren aufgespalten. Die gesamte Herleitung wird zunächst nur für eine einzelne Frequenz (Helmholtzzahl ω) durchgeführt. Daher kann die Zeitableitung durch eine Multiplikation mit $-i\omega$ ersetzt werden. Zusätzlich wird ein Dämpfungsterm eingeführt, der ausschließlich in einer der Koordinatenrichtungen (x oder r) wirken soll. Dieses Vorgehen entspricht einer Streckung der Koordinate in der komplexen Ebene. In vektorieller Schreibweise kann der Ausgangspunkt für die PML-Formulierung sehr kurz dargestellt werden. Die mit Dächern versehenen Größen kennzeichnen, dass die Lösung innerhalb der PML nicht der Lösung der ursprünglichen Gleichungen entspricht. Die komplexe Streckung von r führt dazu, dass auch die eigentlich aus der Ableitung nach φ stammenden Terme mit einem neuen r skaliert werden.

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{\underline{q}}_x + \sigma_x \hat{\underline{q}}_x &= -\underline{A} \cdot \frac{\partial \hat{\underline{q}}}{\partial x} \\ -i\omega \hat{\underline{q}}_r + \sigma_r \hat{\underline{q}}_r &= -\underline{B} \cdot \frac{\partial \hat{\underline{q}}}{\partial r} - \frac{1}{\hat{r}} \underline{C} \cdot \hat{\underline{q}} \end{aligned} \quad (119)$$

Die Formulierung der PML-Randbedingung beruht auf der Annahme, dass die der Grundströmung im Bereich der PML überhaupt nicht mit den Koordinaten variiert, da sonst zusätzliche akustische Quellterme entstehen. Aus diesem Grund werden die Ableitungen der Grundströmung bei der Formulierung der zusätzlichen Dämpfung in der Pufferzone weggelassen. Sie liefern einen

Term q_m für die Zeitableitung, der nicht verändert wird. Durch Multiplikation mit $1 + \frac{i\sigma_x}{\omega}$ bzw. $1 + \frac{i\sigma_r}{\omega}$ und nachfolgende Addition wird die Aufspaltung der Variablen aufgehoben (vgl. Hu [12]).

$$\begin{aligned}
-i\omega\left(1 + \frac{i\sigma_x}{\omega}\right)\left(1 + \frac{i\sigma_r}{\omega}\right)\left(1 + \frac{i\sigma_\varphi}{\omega}\right)\hat{q}_x &= -\left(1 + \frac{i\sigma_r}{\omega}\right)\left(1 + \frac{i\sigma_\varphi}{\omega}\right)\underline{A} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} \\
-i\omega\left(1 + \frac{i\sigma_x}{\omega}\right)\left(1 + \frac{i\sigma_r}{\omega}\right)\left(1 + \frac{i\sigma_\varphi}{\omega}\right)\hat{q}_r &= -\left(1 + \frac{i\sigma_x}{\omega}\right)\left(1 + \frac{i\sigma_\varphi}{\omega}\right)\underline{B} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial r} \\
&\quad - \left(1 + \frac{i\sigma_r}{\omega}\right)\left(1 + \frac{i\sigma_x}{\omega}\right)\frac{1}{r}\underline{C} \cdot \hat{q}
\end{aligned} \tag{120}$$

Es wird keine Dämpfung in φ eingeführt, da in Umfangsrichtung ein analytischer Ansatz gemacht wurde. Dennoch wird durch die Streckung in r eine neue Variable \hat{r} eingeführt, die eine Dämpfung in den nach φ abgeleiteten Termen bedeutet [30].

$$\begin{aligned}
\hat{r} &:= 1 + \frac{i}{\omega}\sigma_\varphi \\
\sigma_\varphi &= \int_0^R \frac{\sigma_r}{r} dr
\end{aligned} \tag{121}$$

Ausmultiplizieren und Sortieren nach den Potenzen von ω liefert ein Gleichungssystem für eine Frequenz. Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt durch Ersetzung der Terme mit $-i\omega$ durch Zeitableitungen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} &= \underbrace{-\underline{A} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \underline{B} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial r} - \frac{1}{r}\underline{C} \cdot \hat{q} - \underline{D} \cdot \hat{q}}_{\text{Euler Gleichungen}} \\
&\quad - \underbrace{(\sigma_x + \sigma_r + \sigma_\varphi)\hat{q} - (\sigma_x \sigma_r + (\sigma_x + \sigma_r)\sigma_\varphi)q_1 - (\sigma_x \sigma_r \sigma_\varphi)q_2}_{\text{NC/F}} \\
&\quad - (\sigma_r + \sigma_\varphi)\underline{A} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial x} - (\sigma_x + \sigma_\varphi)\underline{B} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial r} - (\sigma_x + \sigma_r)\frac{1}{r}\underline{C} \cdot q_1 \\
&\quad - (\sigma_r \sigma_\varphi)\underline{A} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x} - (\sigma_x \sigma_\varphi)\underline{B} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial r} - (\sigma_x \sigma_r)\frac{1}{r}\underline{C} \cdot q_2 \\
&\quad - \frac{M_x}{1 - M_x^2}\underline{A} \cdot [(\sigma_x + \sigma_r + \sigma_\varphi)\hat{q} + (\sigma_x \sigma_r + (\sigma_x + \sigma_r)\sigma_\varphi)q_1 + (\sigma_x \sigma_r \sigma_\varphi)q_2]
\end{aligned} \tag{122}$$

Die Terme mit $\frac{i}{\omega}$ und $-\frac{1}{\omega^2}$ werden durch die Hilfsvariablen q_1 und q_2 ersetzt und entsprechen den Zeitintegralen der ursprünglichen Größen. Diese Hilfsvariablen müssen in der Pufferzone mit bestimmt werden. Sie sind als die Integrale der ursprünglichen Variablen in der Zeit definiert.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_1}{\partial t} &:= \hat{q} \\
\frac{\partial q_2}{\partial t} &:= q_1
\end{aligned} \tag{123}$$

Die Dämpfungsparameter σ_x und σ_r werden entsprechend Gl. (115) berechnet, wobei nur der Abstand in x - bzw. r -Richtung zur Definition verwendet wird. In den Ecken des Rechengebiets ergibt sich eine starke Dämpfung, die in beiden Koordinatenrichtungen wirkt. Da die nicht aufgespaltene PML-Formulierung ("Unsplit-PML") instabil werden kann, wenn beide Koordinatenrichtungen bedämpft werden, wird in den Ecken der der Wand nähere Dämpfungsparameter zugunsten des Entfernteren bevorzugt. Das entspricht einer Normierung. In vektorieller Schreibweise mit

$\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_r)$ ergibt sich folgende Gleichung:

$$\underline{\sigma} = \underline{n}_\sigma \|\sigma\| \quad (124)$$

Wobei \underline{n}_σ der Gradientvektor der Dämpfungsverteilung nach Gl. (115) ist.

Da es trotz der theoretischen Stabilität der PML zu explodierenden Lösungen in Anwesenheit von Drallströmungen kommt, wurde die azimutale Komponente der mittleren Strömungsgeschwindigkeit in der PML-Zone Null gesetzt. Es konnte kein anderer Weg gefunden werden, als einen ähnlichen Verstoß gegen die Annahmen der PML zu begehen, wie Hesthaven [10]. Die Ergebnisse der Validierung und des Vergleichs mit anderen Randbedingungen sind dem nächsten Kapitel zu entnehmen.

13.3 Die charakteristische Randbedingung von Giles

Die in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Randbedingungen sind alle vom Typ einer Pufferzone. Wellen, die das Rechengebiet zu verlassen drohen, werden gedämpft. Am Rand tritt keine Reflexion auf, da der Wert der Störgrößen Null ist. Es gibt wesentlich elegantere Möglichkeiten Randbedingungen zu formulieren, wenn die Eigenschaften der sich ausbreitenden Wellen, die Charakteristiken, benutzt werden. In diesem Abschnitt wird, stellvertretend für eine ganze Klasse von solchen physikalisch abgeleiteten Randbedingungen, die Giles Randbedingung vorgestellt. Sie beruht auf einer Analyse der Lösungen der Euler-Gleichungen in zweidimensionalen kartesischen Koordinaten. Die gewonnenen Informationen über die Lösungseigenschaften der linearisierten Euler-Gleichungen werden im nächsten Abschnitt zur Untersuchung der Entropiewellen verwendet.

Für die physikalisch korrekte Formulierung solcher Randbedingungen, die entweder auf Charakteristiken oder auf Eigenlösungen beruhen, ist die Kenntnis solcher Eigenlösungen der Eulergleichungen in vereinfachter Form Voraussetzung. Die Ableitung der Lösungen erfolgt unter der Annahme einer uniformen Grundströmung aus den Eulergleichungen in Matrix-Vektor Form.

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial x} + \underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial r} = \underline{0} \quad (125)$$

mit

$$\underline{q} = \begin{pmatrix} \varrho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix}; \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{\varrho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{U} & 0 & \frac{1}{\bar{\varrho}} \\ 0 & 0 & \bar{U} & 0 \\ 0 & \gamma \bar{P} & 0 & \bar{U} \end{pmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} \bar{V} & \bar{\varrho}' & 0 & 0 \\ 0 & \bar{V} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{V} & \frac{1}{\bar{\varrho}} \\ 0 & 0 & \gamma \bar{P} & \bar{V} \end{pmatrix} \quad (126)$$

Die Differentialgleichung ist hyperbolisch, daher kann ein Ansatz für wellenförmige Lösungen gemacht werden. Die komplexe Exponentialfunktion mit den Wellenzahlen k_x und k_y sowie der Kreisfrequenz ω stellt eine Basis für solche Eigenlösungen dar. Eingesetzt in die Differentialgleichung (125) liefert der Ansatz zunächst eine Bedingung für die Wellenzahlen in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz. Diese Beziehung wird auch Dispersionsrelation genannt:

$$\det(-\omega \underline{E} + k_x \underline{A} + k_y \underline{B}) = 0 \quad (127)$$

Weiterhin lässt sich eine räumliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (Gruppengeschwindigkeit) daraus ablesen, wenn die Eigenwerte bekannt sind:

$$\underline{v}_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \\ \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \end{pmatrix} \quad (128)$$

Durch diesen Ansatz wird durch Vorgabe der Kreisfrequenz und der zweiten Wellenzahl k_y die Wellenzahl k_x berechenbar. Vor dem nächsten Schritt wird das System mit der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ und der Schallgeschwindigkeit a_∞ , z. B. in der ungestörten Anströmung, dimensionslos gemacht. Die Entdimensionalisierung wird im Abschnitt 8.2 beschrieben. Im Allgemeinen hat das Gleichungssystem vier unabhängige Eigenwerte für k_x und vier zugehörige Eigenvektoren, die im gegebenen Fall mit

$$D = \sqrt{1 - \frac{(1 - \bar{U}^2)k_y^2}{(\omega - \bar{V} k_y)^2}} \quad (129)$$

in dimensionsloser Form wie folgt angegeben werden [7]:

$$k_{1,2} = \frac{\omega - \bar{V} k_y}{\bar{U}} \quad (130)$$

$$k_3 = \frac{(\omega - \bar{V} k_y)(-\bar{U} + D)}{1 - \bar{U}^2} \quad (131)$$

$$k_4 = \frac{(\omega - \bar{V} k_y)(-\bar{U} - D)}{1 - \bar{U}^2} \quad (132)$$

Die ersten beiden Eigenwerte sind gleich und gehören zur sogenannten Entropie-Welle und Wirbelstärke-Welle. Die beiden letzten Eigenwerte gehören zu der stromauf bzw. stromab laufenden akustischen Welle. Die Gruppengeschwindigkeit der Entropieschwankung wie auch der Wirbelstärkeschwankung ist \bar{U} . Die Ausbreitung dieser Störungen ist also rein konvektiv, während sich die akustischen Wellen mit Schallgeschwindigkeit im mitbewegten Bezugssystem ausbreiten.

Die zugehörigen dimensionslosen rechten Eigenvektoren sind in der Literatur wie folgt gegeben [7, 12]:

$$\underline{q}_{1: \text{Entropie}}^R = (-1, 0, 0, 0)^T \quad (133)$$

$$\underline{q}_{2: \text{Wirbelstärke}}^R = \left(0, \frac{u k_y}{\omega}, 1 - \frac{v k_y}{\omega}, 0\right)^T \quad (134)$$

$$\underline{q}_{3: \text{stromab akustisch}}^R = \frac{1 + \bar{U}}{2\omega} \left(\omega - \bar{U} k_3 - \bar{V} k_y, k_3, k_y, \omega - \bar{U} k_3 - \bar{V} k_y\right)^T \quad (135)$$

$$\underline{q}_{4: \text{stromauf akustisch}}^R = \frac{1 + \bar{U}}{2\omega} \left(\omega - \bar{U} k_4 - \bar{V} k_y, k_4, k_y, \omega - \bar{U} k_4 - \bar{V} k_y\right)^T \quad (136)$$

Die kontravarianten linken Eigenvektoren sind:

$$\underline{q}_1^L = (-1, 0, 0, 1)^T \quad (137)$$

$$\underline{q}_2^L = \left(0, \frac{u k_y}{\omega}, 1 - \frac{v k_y}{\omega}, -\frac{k_y}{\omega}\right)^T \quad (138)$$

$$\underline{q}_3^L = \left(0, (1 - \bar{V} \frac{k_y}{\omega}), \bar{U} \frac{k_y}{\omega}, (1 - \bar{V} \frac{k_y}{\omega}) D\right)^T \quad (139)$$

$$\underline{q}_4^L = \left(0, -(1 - \bar{V} \frac{k_y}{\omega}), -\bar{U} \frac{k_y}{\omega}, (1 - \bar{V} \frac{k_y}{\omega}) D\right)^T \quad (140)$$

Diese Eigenwerte liefern die folgende Approximation vierter Ordnung für eine nichtreflektierende Randbedingung in einem kartesischen Gitter mit der lokalen Schallgeschwindigkeit a [7]:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{V} & \frac{1}{2}(a + \bar{U}) & \frac{1}{2}(a - \bar{U}) \\ 0 & \frac{1}{2}(a - \bar{U}) & \bar{V} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (141)$$

Dabei werden die charakteristischen Variablen (c_1, c_2, c_3, c_4) aus den Eigenwerten wie folgt bestimmt [7]:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{\varrho} a & 0 \\ 0 & \bar{\varrho} a & 0 & 1 \\ 0 & -\bar{\varrho} a & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix} \quad (142)$$

Die Rücktransformation ist wie folgt gegeben [7]:

$$\begin{pmatrix} \varrho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 & \frac{1}{2\bar{\varrho}^2} & \frac{1}{2\bar{\varrho}a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\bar{\varrho}a} & -\frac{1}{2\bar{\varrho}a} \\ 0 & \frac{1}{2\bar{\varrho}a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (143)$$

Die nicht reflektierende Randbedingung von Giles stellt eine auf Charakteristiken und Eigenlösungen beruhende Terminierung des Rechengebiets dar. Sie funktioniert optimal, wenn ebene Wellen in einem kartesischen Gitter normal auf die Wand treffen. Je stärker die reale Welle von diesen Annahmen abweicht, um so mehr Reflexionen treten auf. Zusätzlich gibt es das Problem der Langzeitstabilität. Die Randbedingung von Giles [7] zeigt häufig Instabilitäten bei Langzeitintegration. Aus diesen Gründen wurde auf die Verwendung von charakteristischen Randbedingungen zu Gunsten einer künstlichen Pufferzone, die in den vorherigen Abschnitten beschrieben ist, verzichtet.

14 Berücksichtigung der Nichtlinearität

In diesem Kapitel werden die Differentialgleichungen zur Beschreibung der Störungsausbreitung in einem strömenden idealen Gas hergeleitet. Das Feld ist thermodynamisch und strömungsmechanisch durch die Größen Druck, Geschwindigkeit und Dichte beschrieben. Als Störungen werden dabei Abweichungen von einem Ruhezustand dieser Größen bezeichnet. Sie lassen sich ihren Eigenschaften nach in akustische, Entropie- und Vorticity-Wellen aufteilen. Die Bezeichnung Welle ist bei den letzten zwei Störungsarten im weiteren Sinne zu interpretieren. Diese breiten sich rein konvektiv aus, so dass ihre Ausbreitungsmuster nicht der gängigen Vorstellung einer Welle als Lösung der Wellengleichung der Akustik oder Elektrodynamik entsprechen. Die drei Störungsarten³ lassen sich folgendermaßen charakterisieren (siehe [20], [14]):

- Akustische Schwankungen sind adiabate Zustandsänderungen. Dichte, Druck und Temperatur ändern sich gleichzeitig, sie sind durch die Adiabatenbeziehungen gekoppelt. Der Schall breitet sich mit Schallgeschwindigkeit relativ zur Strömung aus.
- Entropieschwankungen sind Störungen der Ruhe-Entropie. Sie breiten sich rein konvektiv aus. Eine Entropiestörung kann beispielsweise durch Verbrennung entstehen. Reine Entropieschwankung äußert sich durch die Schwankung der Dichte und Temperatur bei konstantem Druck.
- Vorticity-Wellen sind Schwankungen der Wirbelstärke. Sie breiten sich konvektiv aus. Diese Wellen bestehen aus einer Schwankung der Geschwindigkeitskomponenten.

Die letzte Störungsart wird in dieser Arbeit nicht explizit behandelt. Im ersten Teil des Kapitels (??) werden, ausgehend von den bereits im Abschnitt 8 abgeleiteten Bilanzgleichungen der Hydrodynamik, die Gleichungen für die fünf Variablen ρ , u , v , w , p hergeleitet. Unter bestimmten Annahmen führen diese Bilanzen zu einem Gleichungssystem, das nach der resultierenden Bewegungsgleichung, der Euler-Gleichung, benannt ist. Die Euler-Gleichungen stellen ein ausreichend gutes Modell zur Beschreibung des Schallfeldes dar. Diese Aufspaltung in Gleich- und Schwankungsanteil ermöglicht die Berechnung der Akustik basierend auf einem gegebenen, z. B. mit CFD-Verfahren berechneten Strömungsfeld. Terme höherer Ordnung, die bei der Zerlegung entstehen, werden zwecks Untersuchung nichtlinearer Effekte beibehalten. Das hergeleitete nichtlineare Differentialgleichungssystem besitzt die nicht konservative Form, in der die Variablen ρ , \underline{u} und p in ihrer Primitivform vorkommen. Dieser Ansatz wird in der Literatur als *PErturbed Nonconservative Non-linear Euler equations* (PENNE) bezeichnet [17]. Ein Vergleich verschiedener Ansätze zur Berechnung der nichtlinearen Störungsausbreitung ist in [1] gegeben. Im letzten Teil des Kapitels (14.5) werden Unterschiede der linearen und nichtlinearen Theorie anhand eines einfachen Beispielprozesses erläutert. Gültigkeitsgrenzen des linearen Modells werden abgeschätzt. Die eingerahmten Gleichungen im Text stellen wichtige Zwischenergebnisse dar und sind die Basis für Umformungsschritte in folgenden Absätzen.

14.1 Kontinuitätsgleichung

Das Einsetzen der Zerlegung (??) in Kontinuitätsgleichung (??) liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \underline{u}_0 \nabla \cdot (\rho_0 + \rho') + \underline{u}' \cdot \nabla (\rho_0 + \rho') \\ + \rho_0 \nabla \cdot (\underline{u}_0 + \underline{u}') + \rho' \nabla \cdot (\underline{u}_0 + \underline{u}') = 0 \end{aligned} \quad (144)$$

³Sie werden auch Lösungsmoden der Modellgleichungen genannt.

Nach Ausmultiplikation der Terme folgt

$$\underbrace{\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \underline{u}_0 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla \cdot \underline{u}_0}_{=0 \text{ wg. Kontinuität}} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \underline{u}_0 \cdot \nabla \rho' + \rho_0 \nabla \cdot \underline{u}' + \underline{u}' \cdot \nabla \rho_0 + \rho' \nabla \cdot \underline{u}_0 + \underline{u}' \cdot \nabla \rho' + \rho' \nabla \cdot \underline{u}' = 0 \quad (145)$$

Der Gleichanteil erfüllt die Kontinuitätsgleichung und wird eliminiert. Teilweise können Gleich- und Schwankungsgrößen wieder zur Gesamtgröße zusammengefasst werden. Entsprechend (??) tragen diese Variablen keine Indizes. Die nichtlineare Kontinuitätsgleichung für die Schwankungsgröße ρ' lautet

$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho' + \rho \nabla \cdot \underline{u}' + \rho' \nabla \cdot \underline{u}_0 + \underline{u}' \cdot \nabla \rho_0 = 0} \quad (146)$$

Sie unterscheidet sich von der linearisierten Form nur durch die zusätzlichen Schwankungsanteile im zweiten und dritten Term.

14.2 Euler-Gleichung

Das Einsetzen von (??) in die Bewegungsgleichung (??) ergibt

$$(\rho_0 + \rho') \left[\frac{\partial (\underline{u}_0 + \underline{u}')}{\partial t} + (\underline{u}_0 + \underline{u}') \cdot \nabla (\underline{u}_0 + \underline{u}') \right] + \nabla (p_0 + p') = 0 \quad (147)$$

Division durch $(\rho_0 + \rho')$ und Ausmultiplikation des Klammerausdrucks führt auf

$$\frac{\partial \underline{u}_0}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \underline{u}_0 (\nabla \cdot \underline{u}_0) + \underline{u}_0 (\nabla \cdot \underline{u}') + \underline{u}' (\nabla \cdot \underline{u}_0) \quad (148)$$

$$+ \underline{u}' (\nabla \cdot \underline{u}') + \frac{\nabla p_0}{\rho_0 + \rho'} + \frac{\nabla p'}{\rho_0 + \rho'} + \underbrace{\frac{\nabla p_0}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0}{\rho_0}}_{=0} = 0 \quad (149)$$

Um die Impulsbilanz für den Gleichanteil eliminieren zu können, wird auf der linken Seite ein Hilfstern mit der Summe Null addiert. Die Sortierung der Terme liefert

$$\underbrace{\frac{\partial \underline{u}_0}{\partial t} + \underline{u}_0 (\nabla \cdot \underline{u}_0) + \frac{\nabla p_0}{\rho_0}}_{=0 \text{ wg. Euler-Gl.}} + \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \underline{u} (\nabla \cdot \underline{u}') + \underline{u}' (\nabla \cdot \underline{u}_0) \quad (150)$$

$$+ \frac{\nabla p'}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \nabla p_0 = 0 \quad (151)$$

Die sich im letzten Term der linken Seite ergebende Subtraktion wird mit dem Ausdruck

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho \rho_0} \right) = \frac{\rho'}{\rho \rho_0} \quad (152)$$

ersetzt. So ergibt sich schließlich

$$\boxed{\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \underline{u} (\nabla \cdot \underline{u}') + \underline{u}' (\nabla \cdot \underline{u}_0) + \frac{\nabla p'}{\rho} - \frac{\rho'}{\rho \rho_0} \nabla p_0 = 0} \quad (153)$$

Dies ist die nichtlineare Eulersche Bewegungsgleichung für die Schwankungsanteile der Geschwindigkeitskomponenten u' , v' und w' . Die nicht markierten Größen bezeichnen Gesamtgrößen entsprechend (??).

14.3 Druckgleichung

Das Einsetzen der Zerlegung in die (??) ergibt

$$\underbrace{\frac{\partial p_0}{\partial t} + \underline{u}_0 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \underline{u}_0}_{=0 \text{ wg. Druckgl.}} + \frac{\partial p'}{\partial t} + \underline{u}_0 \cdot \nabla p' + \underline{u}' \cdot \nabla p_0 + \underline{u}' \cdot \nabla p' \quad (154)$$

$$+ \gamma p_0 \nabla \cdot \underline{u}' + \gamma p' \nabla \cdot \underline{u}_0 + \gamma p' \nabla \cdot \underline{u}' = 0 \quad (155)$$

Nach Subtraktion der Druckgleichung für die Ruhegrößen erhält man die nichtlineare Gleichung für den Schwankungsdruck

$$\boxed{\frac{\partial p'}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla p' + \underline{u}' \cdot \nabla p_0 + \gamma p \nabla \cdot \underline{u}' + \gamma p' \nabla \cdot \underline{u}_0 = 0} \quad (156)$$

wobei die nicht indizierten Größen die Gesamtgrößen darstellen. Bis auf den Faktor γ entspricht diese Gleichung der Kontinuitätsgleichung (146).

14.4 Matrixform der nichtlinearen Gleichungen

Nach den bis jetzt ausgeführten Schritten werden die Gleichungen zusammengefasst. Nach geschickter Aufteilung der vorkommenden Terme lassen sich die Gleichungen in Matrixform formulieren. Sie lautet

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} = -\underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial x} - \underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial r} - \frac{1}{r} \underline{C} \cdot \underline{q} - \underline{D} \cdot \underline{q} \quad (157)$$

Der Vektor \underline{q} enthält die Schwankungsgrößen des akustischen Feldes und ist definiert als

$$\underline{q} = (\rho', u', v', w', p')^T \quad (158)$$

Die Matrizen \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} und \underline{D} lauten

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} u_0 + u' & \rho_0 + \rho' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 + u' & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \\ 0 & 0 & u_0 + u' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_0 + u' & 0 \\ 0 & \gamma(p_0 + p') & 0 & 0 & u_0 + u' \end{pmatrix} \quad (159)$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} v_0 + v' & 0 & \rho_0 + \rho' & 0 & 0 \\ 0 & v_0 + v' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 + v' & 0 & \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \\ 0 & 0 & 0 & v_0 + v' & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(p_0 + p') & 0 & v_0 + v' \end{pmatrix} \quad (160)$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} v_0 - im(w_0 + w') & 0 & \rho_0 + \rho' & -im(\rho_0 + \rho') & 0 \\ 0 & -im(w_0 + w') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -im(w_0 + w') & -2w_0 - w' & 0 \\ 0 & 0 & w_0 + w' & v_0 - im(w_0 + w') & -im \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \\ 0 & 0 & \gamma(p_0 + p') & -im\gamma(p_0 + p') & \gamma v_0 - im(w_0 + w') \end{pmatrix} \quad (161)$$

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) & \frac{\partial \rho_0}{\partial x} & \frac{\partial \rho_0}{\partial r} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{(\rho_0 + \rho')\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} & \frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{\partial u_0}{\partial r} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{(\rho_0 + \rho')\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} & \frac{\partial v_0}{\partial x} & \frac{\partial v_0}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial w_0}{\partial x} & \frac{\partial w_0}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial r} & 0 & \gamma \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) \end{pmatrix} \quad (162)$$

14.5 Anwendungen der nichtlinearen Theorie

In den meisten Publikationen und Lehrbüchern zum Thema Akustik findet man die linearisierte Form der oben hergeleiteten Gleichungen. Es stellt sich die Frage, in welchen praktischen Fällen die Anwendung der nichtlinearen Theorie notwendig ist. Die linearen Euler-Gleichungen und die dazugehörige Wellengleichung für ein ruhendes Medium bieten eine ausreichend gute Approximation für eine Vielzahl von Fällen. Sie sind dort einsetzbar, wo die Schalldruckpegel für direkte menschliche Umwelt typischen Werte erreichen. Ihr Hauptvorteil und der Grund für die weite Verbreitung liegt in der Mathematik. Erst durch die Linearisierung wird der Zugang zu analytischen Lösungen ermöglicht. Ohne auf numerische Methoden zurückgreifen zu müssen, lassen sich geschlossene Lösungen finden – das Superpositionsprinzip gilt.

Untersucht man die Quellen des Lärms, z.B. Verbrennungsmotoren in Flugzeugen, so stellt man fest, dass die dort herrschenden Pegel durch die linearisierten Beziehungen nicht mehr richtig wiedergegeben werden. Um die Zusammenhänge bei der Lärmentstehung verstehen zu können, muss die nichtlineare, nicht vereinfachte, Theorie angewendet werden. Um zwischen dem Einsatz beider Theorien entscheiden zu können, müssen ihre Unterschiede und Gültigkeitsbereiche bekannt sein. Im Folgenden wird dies qualitativ und quantitativ untersucht.

Schallwellen können mit guter Näherung als ein isentroper Vorgang beschrieben werden. Die adiabate Zustandsänderung kann als ein Pumpprozess in einem abgeschlossenen System⁴ interpretiert werden. Dieser Vorgang ist in Abb. 9 skizziert. Auf der Abszisse ist das spezifische Volumen aufgetragen, das dem Kehrwert der Dichte entspricht. Die Bewegung des Kolbens nach links verursacht eine Kompression der Luft im Kolben. Lässt man die der Akustik inhärente Dynamik aus der Betrachtung heraus, so kann dieser Vorgang als eine akustische Störung betrachtet werden. Die Akustik hat die Adiabate als „Kennlinie“. Die Druck-Dichte-Beziehung soll näher untersucht werden. Die Adiabaten Gleichung für diese Größen lautet

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0}^\gamma \quad (163)$$

wobei γ das Verhältnis der Wärmekapazitäten $\frac{c_p}{c_v}$ ist. Wie man sofort erkennt, sind diese Gleichungen nichtlinear. Ziel der Linearisierung ist es (163) durch eine Gerade anzunähern. Diese wird tangential an den Arbeitspunkt angelegt. Der Punkt liegt sinnvollerweise bei den Ruhegrößen p_0 und ρ_0 für den ungestörten Zustand. Man kann zeigen, dass die Steigung der Geraden

$$c_0^2 = \gamma P_0 / \rho_0 \quad (164)$$

beträgt. Bewegt man den Kolben in Abb. 9 mit einer zum Ruhévolumen relativ geringen Amplitude, so ergeben sich für die Adiabate und die lineare Näherung ähnliche Druckverläufe. Bei steigender Amplitude werden die Abweichungen für die beiden Kennlinien jedoch unzulässig groß. Diese Überlegungen sollen jetzt auf den realen Fall übertragen werden. Zuvor soll noch ein für die nichtlineare Akustik charakteristisches Maß eingeführt werden.

Die Wurzel der Steigung der Adiabaten beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls. Es gilt

$$c = \sqrt{\gamma P / \rho} \quad (165)$$

Im Gegensatz zur linearen Rechnung ändert sich c laufend mit der Amplitude. Das hat zur Folge, dass Schallwellen in Gebieten hohen Drucks (Dichte, siehe (163)) schneller propagieren, als in Gebieten niedrigen Drucks. Ein Sinus-Signal steilt sich proportional zur zurückgelegten Entfernung zu einer N-förmigen Welle auf. Die Entfernung, nach der sich die Maxima eines Signals in einer

⁴kein Austausch von Energie über die Wände, ideale Isolierung

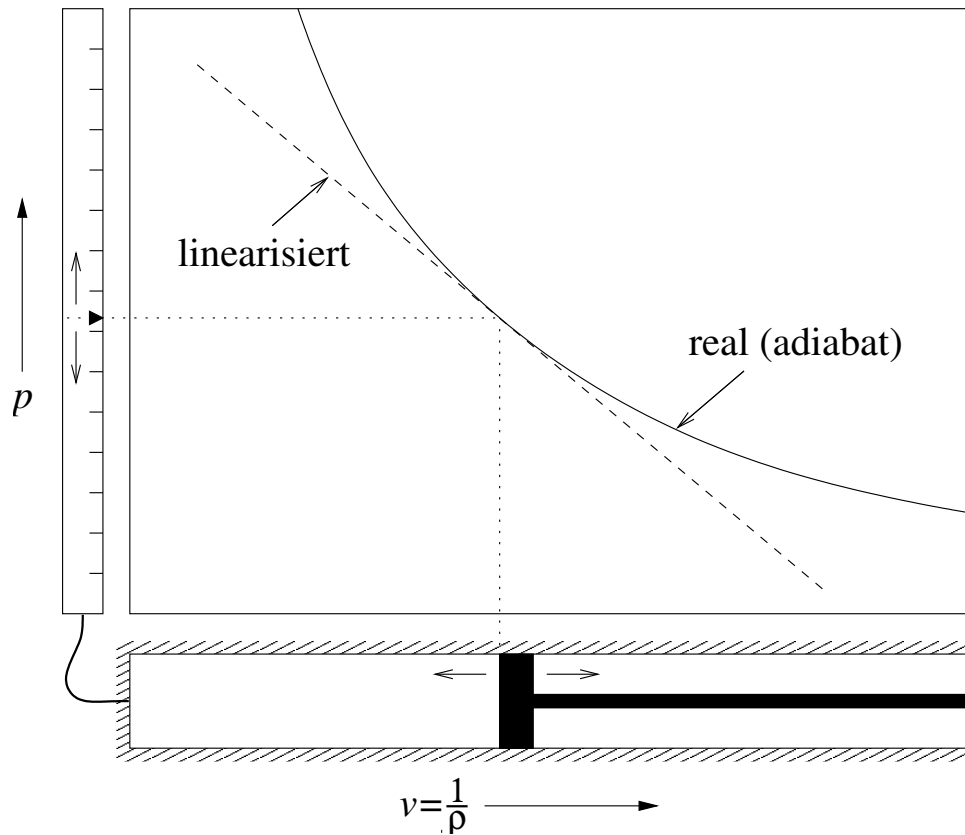


Abbildung 9: Vergleich linearer und nichtlinearer Theorie am Beispiel einer einfachen Zustandsänderung

ebenen Welle überschlagen und Stöße bilden, wird Stoßbildungsstrecke (engl. *shock formation distance*) genannt. Für ein periodisches Signal der Kreisfrequenz ω beträgt sie nach Blackstock [9]

$$\bar{x} = \frac{c_0^2}{\beta u_0 \omega} \quad (166)$$

wobei u_0 die Spitzenamplitude der Schnelle, c_0 die Ruheschallgeschwindigkeit und β der Nichtlinearitätskoeffizient⁵ ist [9]. Die Gleichung zeigt, dass sich der Einfluss der Nichtlinearität über die Ausbreitungsstrecke kumuliert. Unterschiedliche Amplituden können also zu gleichen Verzerrungen führen.

Tabelle 6 gibt eine Übersicht über die Amplituden und Stoßbildungsstrecke abhängig von Schalldruckpegel. Anhand der Stoßbildungsstrecken lässt sich ein Schalldruckpegel von grob 135 dB als Grenze der linearen Approximation festlegen. Tabelle 6 berücksichtigt keine Entropiestörungen, d. h. Verschiebungen der Ruhedichte, der Strömung. Deren Einfluss auf die Lösung im nichtlinearen Fall wird in Kapitel ?? experimentell untersucht.

⁵Für ideale Gase gilt $\beta = (\gamma + 1)/2$

Tabelle 6: Vergleich von Schalldruckpegel, Druck- und Dichteamplituden, akustischer Machzahl und Stoßbildungsstrecke bei Normaldruck

L_p	p'_{rms} [Pa]	u'_{rms} [m/s]	M	\bar{x} bei 1 kHz [m]	\bar{x} bei 10 kHz [m]
0	2×10^{-5}	4.85×10^{-8}	1.41×10^{-10}	3.23×10^8	3.23×10^7
70	6.32×10^{-2}	1.53×10^{-4}	4.46×10^{-7}	1.02×10^5	1.02×10^4
90	0.63	1.53×10^{-3}	4.46×10^{-6}	1.02×10^4	1.02×10^3
110	6.32	1.53×10^{-2}	4.46×10^{-5}	1.02×10^3	102
120	20	4.85×10^{-2}	1.41×10^{-4}	323	32.3
130	63.2	0.15	4.46×10^{-4}	102	10.2
140	200	0.48	1.41×10^{-3}	32.3	3.23
150	632	1.53	4.46×10^{-3}	10.2	1.02

15 Berücksichtigung der Grenzschicht in der mittleren Strömung

Literaturverzeichnis

- [1] I.V. Abalakin, A. Derivieux, and T.K. Kozubskaya. On accuracy of noise direct calculation based on Euler model. *International Journal of Aeroacoustics*, 3(1):87–110, 2004.
- [2] H.L. Atkins. Continued development of the discontinuous galerkin methods for computational aeroacoustic applications. *Nasa Langley*, 2001.
- [3] J.-P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114:185–200, 1994.
- [4] C. Bogey and C. Bailly. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *J. Comput. Phys.*, 194:194–214, 2004.
- [5] C. Campos-Pozuelo, B. Dubus, and J.A. Gallego-Juárez. Finite-element analysis of the nonlinear propagation of high-intensity acoustic waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, 106(1):91–101, 1999.
- [6] R. Ewert and W. Schröder. Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *J. Comput. Phys.*, 188:365–398, 2003.
- [7] M.B. Giles. Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equations Calculations. *AIAA Journal*, 28(12):250–258, 1990.
- [8] J.A. Hamilton and R.J. Astley. Acoustic propagation on irrotational mean flow using time-domain finite and infinite elements. *AIAA 2003-3208*, 2003.
- [9] M.F. Hamilton and D.T. Blackstock, editors. *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, San Diego, 1997. ISBN 0-12-321860-8.
- [10] J.S. Hesthaven. On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized euler equations. *J. Comput. Phys.*, 142:129–147, 1998.
- [11] F.Q. Hu. On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer. *J. Comput. Phys.*, 129:201–219, 1996.
- [12] F.Q. Hu. A Stable Perfectly Matched Layer For Linearized Euler Equations In Unsplit Physical Variables. *J. Comput. Phys.*, 173:455–480, 2001.
- [13] M. Israeli and S.A. Orszag. Approximation of radiation boundary condition. *J. Comput. Phys.*, 41(1):115–135, 1981.
- [14] L.S.G. Kovasznay. Turbulence in a Supersonic Flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 20(10):657–682, October 1953.
- [15] S.K. Lele. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution. *J. Comput. Phys.*, 103:16–42, 1992.
- [16] X.D. Li, C. Schemel, U. Michel, and F. Thiele. On the Azimuthal Mode Propagation in Axisymmetric Duct Flows. *AIAA Paper*, (2002-2521), 2002. URL [../Papers/AIAA-2002-2521.pdf](#).
- [17] L.N. Long. A Nonconservative Nonlinear Flowfield Splitting Method for 3-D Unsteady Fluid Dynamics. *AIAA 2000-1998*, 2000.

- [18] E.E. Marble and S.M. Candel. Acoustic disturbances from gas non-uniformities convected through a nozzle. *J. Sound Vib.*, 55(2):225–243, 1977.
- [19] I. Müller. *Grundzüge der Thermodynamik*. Springer, 1998.
- [20] A.D. Pierce. *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. Acoustical Society of America, 1989.
- [21] S. W. Rienstra. Sound Transmission in Slowly Varying Circular and Annular Ducts with flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 380:279–296, February 1999.
- [22] S.W. Rienstra and A. Hirschberg. *An Introduction to Acoustics*. Eindhoven University of Technology press, <http://www.win.tue.nl/~sjoerdr/papers/boek.pdf>, March 2003. Report IWDE 92–06.
- [23] J.S. Shang. High order compact–difference schemes for time–dependent maxwell–equations. *Journal of Computational Physics*, (153):312–333, 1999.
- [24] J.H. Spurk. *Fluid Mechanics*. Springer, 1997.
- [25] C. K. W. Tam and H. Shen. Direct computation of nonlinear acoustic pulses using high order finite difference schemes. *AIAA paper*, (93–4325), 1993.
- [26] C. K. W. Tam and C. Webb. Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Aeroacoustics. *J. Comp Phys.*, 107(2):262–281, August 1993.
- [27] C. K. W. Tam, C. Webb, and T. Z. Dong. A Study of Short Wave Components in Computational Aeroacoustics. *Journal of Computational Acoustics*, 1:1–30, März 1993.
- [28] C.K.W. Tam, L. Auriault, and F. Cambuli. Perfectly Matched Layer as an Absorbing Boundary Condition for the Linearized Euler Equations in Open and Ducted Domains. *J. Comput. Phys.*, 144:213–234, 1998.
- [29] C.K.W. Tam and Z. Dong. Wall Boundary Conditions for High-Order Finite Difference Schemes in Computational Aeroacoustics. *Theoret. and Comput. Fluid Dynamics*, 6(6):303–322, 1994.
- [30] F.L. Teixeira and W.C. Chew. Finite-Difference Computation of Transient Electromagnetic Waves for Cylindrical Geometries in Complex Media. *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, 38(4):1530–1543, 2000.
- [31] O.V. Vasilyev, T.S. Lund, and P. Moin. A General Class of Commutative Filters for LES in Complex Geometries. *Journal of Computational Physics*, 146:82–104, 1998.
- [32] J. Zierep. *Theoretische Gasdynamik*. G. Braun, 1976.

Index

$e^{+i\omega t}$ -Konvention	34	Ruhegrößen	26
Ableitung		Schalldruckpegel	52
material derivative	21	Schwankungsanteil	26
materielle	21	Störungsrechnung	26
Adiabatenexponent γ	24	Stoßbildungsstrecke	
ratio of the specific heats	24	shock formation distance	51
Aufsteilung	50	Umfangsmoden	33
Dispersionsrelation	44	upwind stencil	15
dispersion relation	44	Wärmekapazität	
Druckgleichung	49	spezifische	23
Entropie	47	Zylinderkoordinaten	31–32
Euler-Gleichung	22, 48	Axialsymmetrie	32–35
Filterkennlinie	15	Divergenz	31
Filterung	14	Gradient	31, 32
Gaskonstante \mathcal{R}	23	Laplace Operator	32
Gitterschwingungen		Rotation	32
spurious waves	12	Zweite Vektorform	32
Größen			
dimensionslose	24–26		
Einheitsgrößen	25		
physikalische	21		
Grundgleichungen	21–30		
homentrop	35		
rotationsfrei	35		
Gruppengeschwindigkeit	44		
Kontinuitätsgleichung	47		
Linearisierung	26–29		
der Druckschwankung	27–28		
der Entropieschwankung	28–29		
linearisierte Grundgleichungen	29–30		
Modale Zerlegung	32–35		
PENNE	47		
PML			
Split-PML	41		
Randbedingung			
axiale Symmetrie/Antimetrie	35–37		
Ghostpoint	17		
Interpolation	35–37		
schallharte Wand	19–20		
Slip-Wall	17		